CAPTURA GRAVITACIONAL PARA O PROBLEMA BI-CIRCULAR

Alexandre Lacerda Machuy Francisco[1] (machuy@dem.inpe.br)
Antônio Fernando Bertachini De Almeida Prado[1] (prado@dem.inpe.br)
Teresinha De Jesus Stchuy[2] (tstuchuy@if.ufrj.br)
[1]INPE, Divisão de Mecânica Espacial e Controle, C. P. 515, 12227-310, São José dos Campos/SP
[2]UFRJ, Dep. de Física e Matemática, Instituto de física, C.P. 658528, 21945-970, Rio de Janeiro/RJ

Resumo. *O problema bi-circular é um caso particular do problema de quatro corpos, onde uma das massas, digamos m_4, é suposta zero ou infinitamente pequena comparada com as outras três massas. Com essa hipótese m_4 move-se no potencial de m_1, m_2 e m_3, mas não perturba o movimento dos três corpos massivos. No problema bi-circular, o movimento de m_1, m_2 e m_3 ao redor do centro de massa é considerado como sendo formado por órbitas circulares e o movimento de m_4 tem que ser determinado como função das condições iniciais. Podemos considerar o problema bi-circular como uma perturbação do problema de três corpos restrito. Este problema pode ser usado como um modelo para o movimento de uma partícula ou veículo espacial no sistema Sol-Terra-Lua. Na primeira parte do texto fornecemos as equações de movimento do modelo e definimos captura gravitacional. A segunda parte desse artigo é destinada ao cálculo de alguns resultados numéricos para o problema bi-circular, tais como órbitas diretas, retrógradas e de captura.*

Palavras-chave: *Captura Gravitacional, Problema Bi-circular e Mecânica celeste.*

1. INTRODUÇÃO

Uma captura gravitacional ocorre quando um veículo espacial (ou qualquer partícula de massa desprezível) tem a mudança de energia de positiva para negativa, no interior da esfera de influência de um corpo celeste. Em termos de órbitas e sair de uma hiperbólica é passar a uma órbita elíptica. Nesse trabalho estudaremos captura gravitacional para o problema bi-circular.

Os conceitos e definições apresentados neste texto foram extraídos da tese de doutoramento de Ernesto Vieira Neto [4], ele estuda captura gravitacional para os problemas de três corpos, restrito, circular e elíptico.

Neste artigo estudamos captura gravitacional usando como modelo o problema bi-circular, e obtemos resultados numéricos para esclarecer a teoria. O problema bi-circular é uma perturbação do problema de três corpos restrito circular, podemos considerar como corpos Terra, Lua, Sol é um veículo espacial. As equações de movimento do problema bi-circular estão deduzidas nas referencias [5] e [6].

2. MODELOS DE N CORPOS

Para definir captura gravitacional é necessário usar alguns conceitos básicos do problema de dois corpos. Esses conceitos são descritos abaixo.

2.1. O Problema de Dois Corpos

Chamaremos de C_3 a soma das energias cinéticas e potencial do problema de dois corpos partícula-Lua, isto é:

$$C_3 = V^2 - \frac{2\mu_M}{r} \tag{1}$$

onde r e V são respectivamente a distância e a velocidade da partícula em relação á Lua, e μ_M é a massa adimensional da Lua.

Se considerarmos apenas dois corpos (Lua e partícula) $C3$ é constante se a única força for a atração gravitacional. Descrevemos abaixo as órbitas da partícula para valores de $C3$ conforme a classificação:

i) Caso $C3 > 0$ as órbitas são hiperbólicas,
ii) Caso $C3 = 0$as órbitas são parabólicas,
iii) Caso $C3 < 0$ as órbitas são elípticas.

2.2. O Problema de Três Corpos Restrito

O problema de três corpos com as duas hipóteses abaixo é chamado de problema de três corpos restrito.

Primeira hipótese: Sejam P_1, P_2 e P_3 três corpos com massas m_1, m_2 e m_3 respectivamente e supomos que m_3 é muito menor que m_1 e m_2.

Segunda hipótese: Admite-se ainda que os corpos P_1 e P_2 se movem em órbitas circulares coplanares, e que o corpo P_3 se move no potencial gerado por P_1 e P_2 neste movimento sem afetá-lo.

Observação: Os corpos P_1 e P_2 são chamados de primários.

As coordenadas dos primários $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ são dependentes do tempo e facilmente determinadas.

$$x_1 = b\cos(nt) \qquad y_1 = b\sin(nt) \qquad z_1 = 0 \tag{2}$$

$$x_2 = -a\cos(nt) \qquad y_2 = -a\sin(nt) \qquad z_2 = 0 \tag{3}$$

Considerando (x, y, z) as coordenadas do corpo P_3, as equações de movimento do corpo P_3 no sistema sideral são:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\left[\frac{m_1(x - bcos(nt))}{r_1^3} + \frac{m_2(x + acos(nt))}{r_2^3}\right] \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\left[\frac{m_1(y - bsin(nt))}{r_1^3} + \frac{m_2(y + asin(nt))}{r_2^3}\right] \tag{5}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2\left[\frac{m_1 z}{r_1^3} + \frac{m_2 z}{r_2^3}\right] \tag{6}$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias fornecidas a seguir:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2} \quad \text{e} \quad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2}$$

No sistema Sinódico adimensional as equações de movimento passam a ser:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_{\mathrm{x}} \tag{7}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_{\mathrm{y}} \tag{8}$$

$$\ddot{z} = \Omega_{\mathrm{z}} \tag{9}$$

$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ é a energia potencial.

2.3. O Problema de Quatro Corpos

Consideremos o movimento de quatro pontos materiais P_1, P_2, P_3 e P_4. Supondo que os pontos estejam no espaço Euclidiano tridimensional, representaremos por (x_k, y_k, z_k) as coordenadas dos pontos (k é um número inteiro e $1 \leq k \leq 4$). Definiremos como $r_{k,l}$ a distância entre P_k e P_l.

$$r_{k,1}^2 = (x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 + (z_k - z_1)^2 \tag{10}$$

Por conveniência de notação, utilizaremos q_k para representar x_k, y_k e z_k quando nos referirmos à projeção num dado eixo coordenado. O q descreve uma das 12 possíveis coordenadas q_k, além disso, designaremos por m_k a massa do ponto descrito por q. A função potencial pela lei de atração gravitacional de Newton é dada abaixo:

$$U = \sum \frac{m_k m_l}{r_{k,l}}, \qquad k < l \tag{11}$$

As equações de movimento do problema de quatro corpos podem ser escritas na forma abreviada:

$$m\ddot{q} = -U_q \tag{12}$$

onde U_q representa a derivada parcial de U em relação a q. As equações de movimento podem, também, ser escritas como um sistema de oito equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -m^{-1} U_q \end{cases} \tag{13}$$

A solução do problema de quatro de corpos consiste na descrição do comportamento global do movimento para condições iniciais arbitrariamente preestabelecidas.

2.3.1. O problema bi-circular no plano

O problema de quatro corpos com as duas hipóteses abaixo é chamado de problema bi-circular.

Primeira hipótese: A Terra e a Lua formam os dois primários, com ambos em órbitas circular em torno do centro de massa comum;

Segunda hipótese: O sol é o terceiro primário em órbita circular em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua.

O quarto corpo tem massa muito menor que os outros corpos e será chamado de partícula.

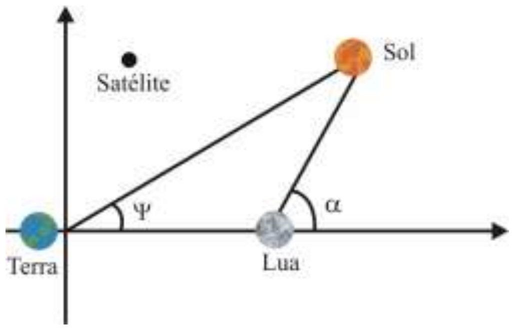

Figura 1 - Problema Bicircular.

2.3.2. Equações de movimento do problema bicircular no plano

Tornaremos o sistema adimensional, dividindo todas as distâncias pela distância entre os dois primários e as massas serão divididas pela massa total dos dois primários. Além disto, será definido que a velocidade angular do sistema é unitária.

Fornecemos abaixo as massas e distâncias da Terra, Lua e Sol.

M_T = 5,98 x10^{24} *kg* Massa da Terra.
M_L = 7,35 x10^{22} *kg* Massa da Lua.
M_S = 1,99 x10^{30} *kg* Massa do Sol.
d_1 = 3,844 x10^{5} *km* Distância Terra Lua.
d_2 = 1,496 x10^{8} *km* Distância Terra Sol.

Com os dados escritos acima as massas da Terra, Lua e Sol no sistema adimensional são dadas por:

$$\mu_E = \frac{M_T}{M_L + M_T} = 0{,}9878715$$

$$\mu_M = \frac{M_L}{M_T + M_L} = 0{,}0121506683$$

$$\mu_S = \frac{M_S}{M_T + M_L} = 328900{,}48$$

As circunferências descritas pela Lua e Terra têm raios μ_E e μ_M, respectivamente.

Sejam (x, y), (x_E, y_E), (x_M, y_M) e (x_S, y_S) as coordenadas da: partícula, Terra, Lua e Sol respectivamente. Abaixo fornecemos as equações de movimento da Terra, Lua e Sol:

$$x_E = -\mu_M \cos(t), \qquad y_E = -\mu_M \sin(t) \tag{14}$$

$$x_M = \mu_E \cos(t), \qquad y_M = \mu_E \sin(t) \tag{15}$$

$$x_S = R_S \cos(\psi), \qquad y_S = R_S \sin(\psi) \tag{16}$$

$$\psi = \psi_0 + \omega_S t \tag{17}$$

onde R_S = 389,1723985 e ω_S = 0,07480133 (velocidade angular do Sol).

Observamos que quando $t = 0$, as posições da Lua, Terra e Sol são: (μ_E, 0), (μ_M, 0) e ($R_S \cos(\psi_0)$, $R_S \sin(\psi_0)$).

Sendo:

$$r_1 = \sqrt{(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}$$

Logo temos as equações de movimento da partícula no sistema inercial:

$$\ddot{x} = -\mu_E \frac{(x - x_E)}{r_1^3} - \mu_M \frac{(x - x_M)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(x - x_S)}{r_3^3} \tag{18}$$

$$\ddot{y} = -\mu_E \frac{(y - y_E)}{r_1^3} - \mu_M \frac{(y - y_M)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(y - y_S)}{r_3^3} \tag{19}$$

Introduziremos um sistema de coordenadas girantes sobre o centro de massa do sistema Terra-Lua com a mesma velocidade angular dos primários. Sejam (ξ, η) as coordenadas da partícula neste sistema sinódico.

As equações que convertem as coordenadas do sistema fixo para o girante são:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{20}$$

Se calcularmos as derivadas de cada componente duas vezes obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} - \eta \\ \xi + \dot{\eta} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\xi) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta \end{pmatrix} \tag{22}$$

As coordenadas dos quatro corpos são dadas por: Lua (ξ_M, η_M) = (μ_E, 0), Terra (ξ_E, η_E) = ($-\ \mu_M$, 0), Sol (ξ_S, η_S) = ($R_S[\cos((1-\omega_S)t-\psi_0)]$, $-R_S[\sin((1-\omega_S)t-\psi_0)]$) e partícula ($\xi$, η) . Observamos que $1-\omega_S$ é a velocidade angular do Sol no sistema sinódico.

Observação: As coordenadas (ξ, η) são chamadas sinódicas e as coordenadas (x, y) são chamadas siderais.

As três distâncias no sistema sinódico passam a ser:

$r_1 = \sqrt{(\xi-\mu_M)^2+\eta^2}$, distância da partícula à Terra.

$r_2 = \sqrt{(\xi-\mu_E)^2+\eta^2}$, distância da partícula à Lua.

$r_3 = \sqrt{(\xi-\xi_S)^2+(\eta-\eta_S)^2}$, distância da partícula ao Sol.

As equações de movimento da partícula no sistema sinódico são consequentemente:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi - \frac{\mu_S}{R_S^3}\xi_S = -\mu_E\frac{\xi+\mu_M}{r_1^3} - \mu_M\frac{\xi+\mu_E}{r_2^3} - \mu_S\frac{\xi+\xi_S}{r_3^3} \quad (23)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta + \frac{\mu_S}{R_S^3}\eta_S = -\mu_E\frac{\eta}{r_1^3} - \mu_M\frac{\eta}{r_2^3} - \mu_M\frac{\eta-\eta_S}{r_3^3} \quad (24)$$

2.3.3. Hamiltonia e lagrangeana do problema bi-circular no plano

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema inercial são:

$$E_c = \frac{1}{2}[\dot{x}^2+\dot{y}^2] \quad e \quad V = -\frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \quad (25)$$

Fornecemos a Lagrangeana e a Hamiltoniana no sistema de coordenas fixo. A Lagrangeana é dada pela diferença entre as energias cinética e potencial, isto é:

$$L = E_c - V = \frac{1}{2}[\dot{x}^2+\dot{y}^2] + \frac{\mu_E}{r_1} + \frac{\mu_M}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} \quad (26)$$

A energia total do sistema é:

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}[\dot{x}^2+\dot{y}^2] - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \quad (27)$$

Considerando os momentos $p_\xi = \dot{\xi} - \eta$ e $p_\eta = \dot{\eta} + \xi$, as energias cinética e potencial da partícula no sistema girante são:

$$E_c = \frac{1}{2}\left[p_\xi^2 + p_\eta^2\right] + \eta p_\xi - p_\eta \xi \quad (28)$$

$$V = -\frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} + \frac{\mu_S}{R_S^3}(\xi\xi_S + \eta\eta_S) \quad (29)$$

Mediante uma transformação de Legrendre obtemos a Hamiltoniana no sistema girante:

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}\left[p_\xi^2 + p_\eta^2\right] + \eta p_\xi - p_\eta\xi - \frac{1-\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} + \frac{\mu_S}{R_S^3}(\xi\xi_S + \eta\eta_S) \quad (30)$$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS PRELIMINARES NO (PBC)

Consideremos agora o problema bi-circular com C_3 sendo a energia do sistema Lua-partícula. Contrário ao que ocorre no problema de dois corpos C_3 não é constante no problema bi-circular. Então, para algumas condições iniciais, a partícula pode alterar o sinal de sua energia de positivo para negativo ou de negativo para positivo. Quando a variação é de positivo para negativo chamamos de órbita de captura gravitacional. A situação oposta quando a energia muda de negativo para positivo é chamada de “fuga” gravitacional ou escape.

Na Figura 2 mostramos órbitas parabólicas do problema bi-circular, isto é, $C_3 = 0$. Na Figura 3 temos órbitas elípticas com C3 = −0,10.

Em ambas as figuras temos os gráficos: em vermelho para $\alpha = 0^o$, em verde claro para $\alpha = 45^o$, em azul claro para $\alpha = 90^o$, em rosa para $\alpha = 135^o$, em azul escuro para $\alpha = 180^o$, em marrom para $\alpha = 225^o$ e em verde escuro para $\alpha = 270^o$.

Observação1: os gráficos das Figuras 2 e 3 estão no sistema sinódico.
Observação2: em todos os gráficos $\psi = 0$.

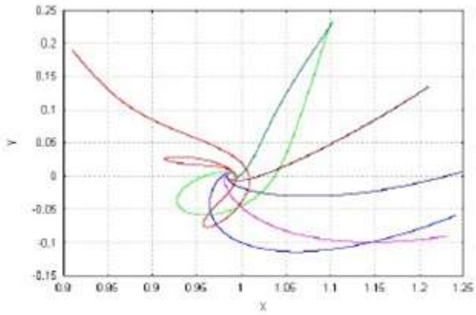

Figura 2 – Órbitas parabólicas.

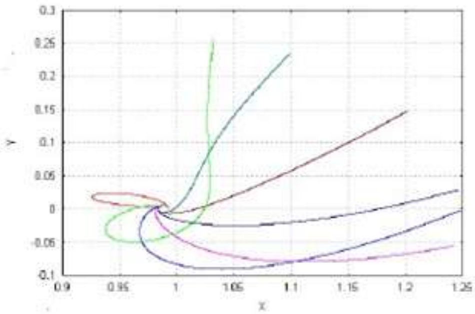

Figura 3 – Órbitas elípticas.

Descreveremos abaixo a metodologia numérica.

1. O integrador utilizado foi um Runge-Kutta de quarta ordem, a linguagem computacional Fortran.
2. Integramos as equações de movimento da partícula no sistema sideral, aplicamos uma rotação e obtemos o movimento da partícula no sistema sinódico.
3. Explicaremos abaixo como são escolhidas as condições iniciais do problema bi-circular, isto é, a posição e velocidade inicial da partícula.

3.1. Posição Inicial

O ponto de partida de cada trajetória do veículo espacial fica a uma distância de 100 km da superfície da Lua (r_p = 1838 km a partir do centro da Lua), que chamaremos de periluna. Para especificar completamente a posição inicial é necessário conhecer o valor de mais uma variável. A variável usada é o ângulo α, que é a posição da periluna. Este ângulo é medido a partir da linha Terra-Lua, no sentido anti-horário, a partir do lado oposto à terra. (Figura 4).

Figura 4 – Condições iniciais.

3.2. Velocidade Inicial

A magnitude da velocidade inicial V é calculada a partir do valor de $C_3 = V^2 - \frac{\mu_M}{r}$. A direção do vetor velocidade do veículo é escolhida como sendo perpendicular à linha que une o veículo espacial ao centro da Lua, apontando na direção anti-horária para as órbitas diretas e na direção horária para as órbitas retrógradas.

3.3. Captura gravitacional

A órbita é considerada de captura, quando a partícula alcança a distância de 100000 km (0,26 unidades canônicas) a partir do centro da lua, num tempo inferior do que 50 dias (aproximadamente 12 unidades canônicas).

A esfera com o raio acima centrada na Lua é definida como esfera de influência da Lua. A Figura 4 mostra o ponto P onde o veículo espacial escapa da esfera de influência. O ângulo que define este ponto é chamado de ângulo da posição de entrada e é descrito pela letra grega β.

Observação3: na integração numérica o passo de tempo é negativo, portanto as condições iniciais são na realidade as condições finais da órbita após a captura.

4. ÓRBITAS DIRETA E RETRÓGRADA

Na Figura 5 temos uma órbita direta e na Figura 6 uma órbita retrógrada. Nos gráficos abaixo os ângulos são: $\alpha = 180^o$ e $\psi = 0^o$, com $C_3 = -0{,}6$.

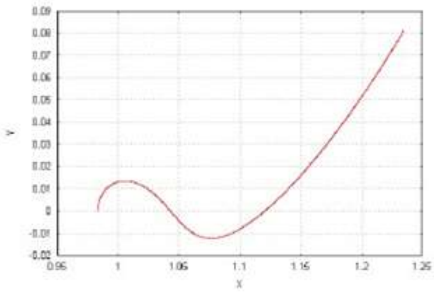

Figura 5 - Órbita direta.

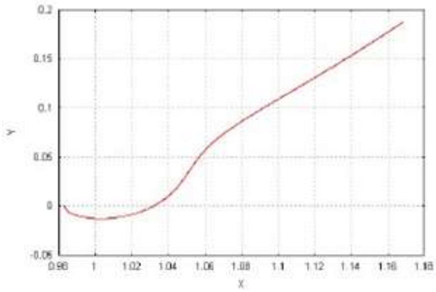

Figura 6 - Órbita retrógrada.

5. VARIAÇÃO DA ENERGIA

Faremos agora a energia C_3 variar. Teremos os ângulos fixos α = 180º e ψ = 0º. Para o gráfico em rosa temos $C_3 = -0{,}6$, o gráfico em azul temos $C_3 = -0{,}4$, o gráfico em verde $C_3 = -0{,}2$ e o gráfico em vermelho $C_3 = 0{,}0$. Na Figura 7, órbitas diretas e na Figura oito, órbitas retrógradas.

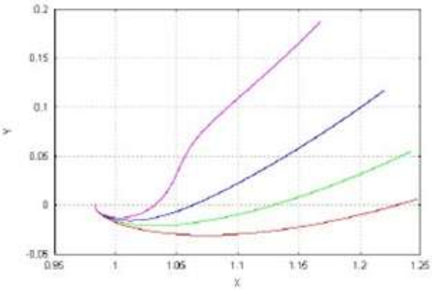

Figura 7 - Órbitas diretas.

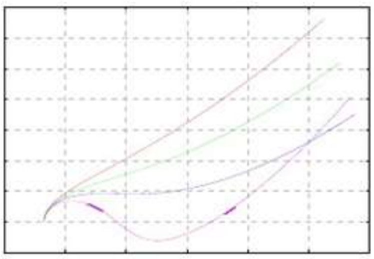

Figura 8 - Órbitas retrógradas.

6. VARIAÇÃO DO ÂNGULO ψ

Agora faremos $C_3 = -0{,}15$ e α = 120º fixos. Quem varia agora é o ângulo ψ. O gráfico em vermelho ψ = 0º, em verde ψ = 90º, em azul ψ = 180º e em rosa ψ = 270º. Na Figura 9 órbitas retrógradas e na Figura 10 órbitas diretas.

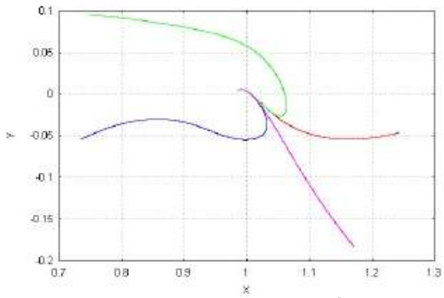

Figura 9 – Variação do ângulo ψ. Órbitas diretas.

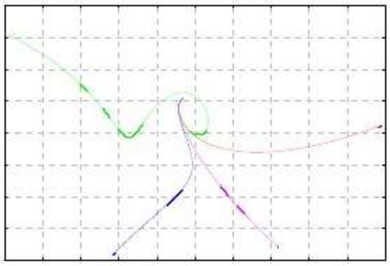

Figura 10 – Variação do ângulo ψ. Órbitas retrógradas.

7. ÓRBITAS DE CAPTURA

Existem dois testes numéricos para verificarmos se uma órbita é de captura.

Primeiro teste: recordamos aqui a condição de uma órbita ser de captura. Quando a partícula alcança a distancia de 100000 km (0,26 unidades canônicas) a partir do centro da Lua, num tempo menor que 50 dias (aproximadamente 12 unidades canônicas de tempo) a órbita é considerada de captura. Esse teste é feito para cada passo de integração.

Segundo teste: na periluna C_3 é negativo. Caso, na integração numérica, em algum passo C_3 mude para positivo (estamos integrando com passo negativo), temos uma órbita de captura. Em termos de órbita isso significa sair de uma órbita hiperbólica e passar para uma órbita elíptica. Na Figura 10 temos $C_3 = -0{,}2$, $\psi = 0^o$ e $\alpha = 90^o$ (vermelho), 180º (verde) e 270º (azul). Na Figura 11, órbitas diretas e na Figura 12, órbitas retrógradas.

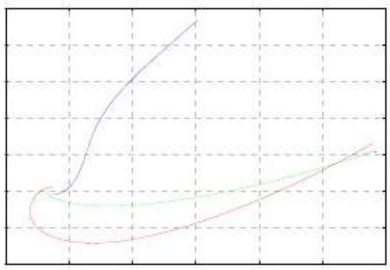

Figura 11 – Órbitas de capturas diretas.

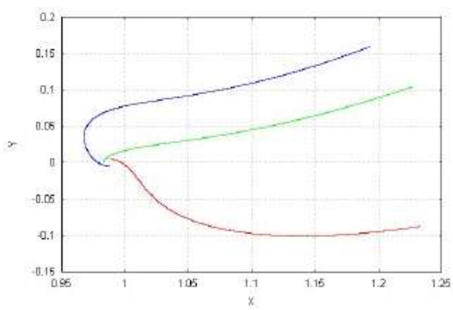

Figura 12 – Órbitas de captura retrógrada.

Nas Figuras 13 e 14 temos os gráficos de C_3 em função da distância, a distância é fornecida em km. No gráfico 13, órbitas diretas e no gráfico 14, órbitas retrógradas. Observamos que em todos os gráficos existem uma mudança de sinal de C_3, isto é, todas as órbitas são de captura gravitacional. Nos gráficos temos: $\alpha = 90^o$ (vermelho), 180º (verde) e 270º (azul).

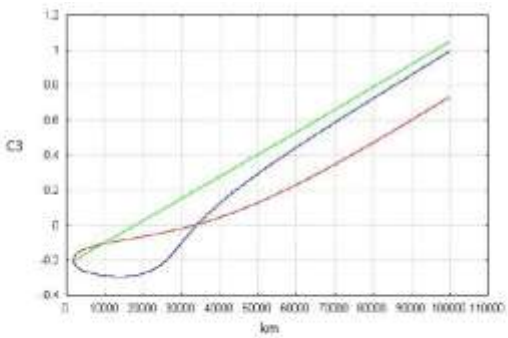

Figura 13 - C_3 em função da distância em órbitas diretas.

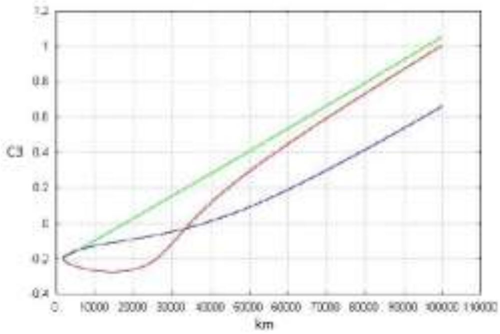

Figura 14 - C_3 em função da distância em órbitas retrógradas.

8. CONCLUSÃO

O objetivo desse artigo é ser uma introdução a captura gravitacional. Foi usado como modelo matemático o problema bi-circular. Um grande número de resultados numéricos permite concluir que temos grande sensibilidade a condições iniciais para termos captura gravitacional. O futuro desse trabalho é o consumo mínimo de energia que será tratado em minha tese de doutoramento.

9. REFERÊNCIAS

1. Prado, A. F. B. A., Numerical study and analytic estimation of forces acting in ballistic gravitational capture. Journal of Guindance, Control and Dynamics 25 (2) 368-375, 2002.
2. J. Llibre, R. Martinez, and C. Simó, Transversality of the invariant manifolds associated To the Lyapunov family of periodic orbits near L2 in the restricted three-body problem,J. Diff. Equns, 58, 104-156 (1985).
3. Vieira Neto, E. Prado, A.F.B.A. Study of the gravitational capture in the elliptical restricted three-body problem. In International Symposium on Space Dynamics, Toulouse, 1995.
4. Vieira Neto, E., Estudo Numérico da Captura Gravitacional Temporária Utilizando o Problema Restrito de Três Corpos. Ph.D. Dissertation, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Brazil, 1999.
5. Simó, C. Gomez, G. Jorba, A., Masdemont, J. The bi-circular model near the triangular libration points of the R T B P. In: Roy, A E., Steves, B. A (eds.), from Newton to Chaos. Plenum Press, New York, pp3453-370, 1995.
6. Castella, E., Jorba, A. On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of the bi-circular problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 76 (1), 35-54, 2000.