Revista
Ciências Exatas

ISSN: 1516-2893

Vol. 21 | Nº. 1 | Ano 2015

DETECÇÃO DO CAOS NO ESPAÇO DE FASE POR MEIO DO EXPOENTE DE LYAPUNOV

Jizreel Pereira da Silva

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Instituto de Física

jizreelsilva@yahoo.com.br

RESUMO

Neste trabalho, usa-se a distribuição dos expoentes de Lyapunov, ferramental importantíssimo para analisar a dinâmica de partículas interagentes no espaço de fase, através da sensibilidade. Um sistema é classicamente caótico quando ele apresenta sensibilidade exponencial às condições iniciais. Opondo-se a sistemas caóticos estão os sistemas integráveis, onde a existência de tantas constantes de movimento quanto o número de graus de liberdade faz com que o movimento resultante seja bastante simples.

Palavras-chave: Caos, expoente de Lyapunov, espaço de fase.

ABSTRACT

In this paper, we use the distribution of exponents of Lyapnov, important to analyze the dynamics of interacting particles in phase space through sensitivity tooling. A system is classically chaotic when he presents exponential sensitivity to initial conditions. Opposing chaotic systems are the integrable systems, where the existence of so many constants of motion as the number of degrees of freedom makes the resulting motion is quite simple.

Keywords: Chaos, Lyapunov exponent, phase space.

Correspondência/Contato

UNIVERSIDADE DE TAUBATÉ
Departamento de Engenharia Mecânica

Rua Daniel Danelli, s/n, Jd. Morumbi
Taubaté - SP
CEP 12060-440
Fone (12) 3625-4193

1 INTRODUÇÃO

Um sistema dinâmico é descrito por qualquer conjunto de grandezas, conhecidas como variáveis dependentes que variam no tempo (variável independente), (LEMOS, N. A, 2007). Dada uma função $f(x, y, z)$, esta descreve a equação de estado de uma partícula no espaço, em particular de três dimensões e no caso de $f(x, y, z, t)$, observamos a evolução através do tempo que é o parâmetro para descrever a dinâmica do sistema, onde a superfície poderá estar em movimento ou se deformando.

O espaço de fase é o espaço de estados possíveis para o sistema, onde a evolução é descrita por um conjunto de equações discretas ou diferenciais que constituem a regra, permitindo prever o comportamento futuro, total ou parcial, uma vez conhecido o seu estado inicial.

A dinâmica em termos da função Hamiltoniana, nos permite descrever com mais detalhes a evolução de sistemas com relação à Mecânica Newtoniana que é baseada em coordenadas cartesianas, sendo que com sistemas que aparecem vínculos ou necessitam de maior quantidade de variáveis, os Sistemas Hamiltonianos, definem num espaço de coordenadas (q,p), onde eventualmente pode depender do tempo t.

Através dos estudos de sistemas (qualquer que seja) e analisando as propriedades de sensibilidade quanto às condições iniciais, ou seja, dois pontos se separam, por mais próximos que estivessem inicialmente no espaço de fases e ser limitado, observa-se a presença do caos. Normalmente, o espaço de fases de sistemas conservativos é composto por domínios onde a dinâmica pode ser regular, caótica ou mistura de ambos. Neste trabalho, observa-se as trajetórias caóticas através dos expoentes de Lyapunov, que são grandezas utilizadas para quantificação de caos em sistemas dinâmicos extremamente sensíveis.

2 SISTEMAS HAMILTONIANOS E O ESPAÇO DE FASE

Os sistemas hamiltonianos podem ser descritos pelas equações de movimento, de Hamilton, (PELLEGRINO, 1991):

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

Sendo $H(q,p)$ a hamiltoniana do sistema e k, seu número de graus de liberdade. Para um determinado sistema, q, a coordenada generalizada da posição e p, do momento, a quantidade $F(q,p)$, função das variáveis dinâmicas, é dita constante de movimento ($dF/dt = 0$), se $\{F,H\} = 0$, onde $\{,\}$ são parênteses de Poisson, (BERNARDES, 2002). Se o sistema possui n constantes de movimento independentes F_i tais que $\{F_i,F_j\} = 0$ para quaisquer $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, então o sistema é dito integrável.

A diferença entre movimento regular e irregular (caótico) é o número de constantes de movimento além da energia E: movimento completamente regular (quase-periódico e estável) é próprio de sistemas integráveis. De uma forma geral, os sistemas são não-integráveis e podem executar movimento regular (quase periódico) em determinadas regiões do espaço de fase e caótico em outras regiões. Uma maneira de se distinguir o movimento caótico do regular, baseia-se no fato de que aquele é extremamente sensível às condições iniciais; trajetórias inicialmente próximas, x_1 e x_2, divergem exponencialmente no tempo:

$$\Delta(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = e^{\lambda t}\Delta(t=0), \tag{2}$$

Ou seja, não importa quão pequeno seja $\Delta(t = 0)$. O expoente de Lyapunov λ, marca desse tipo de instabilidade, sendo indicador para observação de sistemas caóticos.

Em geral, os sistemas hamiltonianos conservativos não-integráveis, têm apenas a energia E como constante de movimento. As trajetórias no espaço de fase estão restritas à superfície $H(q,p) = E$ de dimensão $2n$-1. Como existe a possibilidade de regiões com movimento regular e caótico, seria interessante caracterizar o sistema segundo $\mu(E)$ da superfície $H(q,p) = E$, ocupada por movimento caótico. Se $\mu(E) = 1$, o sistema é dito ergódico e uma trajetória típica preenche densamente a superfície de energia E.

Com relação ao Espaço de Fase (Fig. 1), podemos imaginar um espaço com coordenadas q_i e p_i de tal forma que evoluindo no tempo, variam continuamente, descrevendo uma trajetória neste espaço, (FERRARI, 2011).

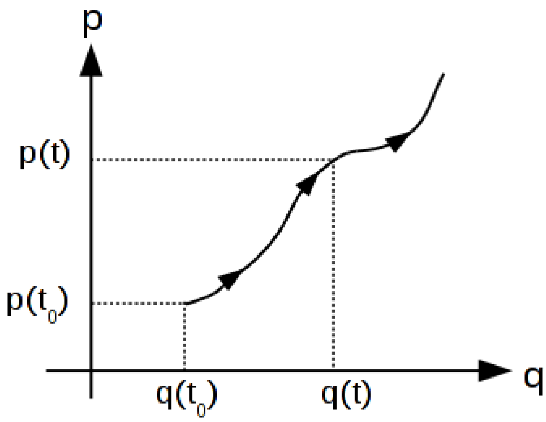

Figura 1 - Trajetória no espaço de fase

Neste caso, p e q são coordenadas independentes, pois p é obtido a partir de q.

Podemos entender o estado do sistema num determinado instante como descrito tanto pelas coordenadas generalizadas q quanto pelos momentos canonicamente conjugados p, que são variáveis independentes entre si, e que dependem do tempo. Num instante t_0, conhecemos seus valores iniciais, $q_0 = q(t_0)$ e $p_0 = p(t_0)$, e determinamos as funções $q(t)$ e $p(t)$, sendo soluções de determinada equação diferencial. As equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema do espaço de fase são de 1ª ordem no tempo e a especificação de um ponto neste espaço também especifica completamente uma condição inicial deste sistema de equações, sendo única a solução do sistema de equações dada esta condição inicial.

Se observarmos com relação ao espaço de configurações, vemos que não vale, pois, a especificação de um ponto no espaço de configurações define apenas as posições das partículas que compõem o sistema naquele instante, e não suas velocidades. As equações de movimento no espaço de configurações são equações de 2ª ordem no tempo. É possível, que do mesmo ponto inicial no espaço de configuração, emanem duas soluções fisicamente válidas das equações de movimento (Fig. 2).

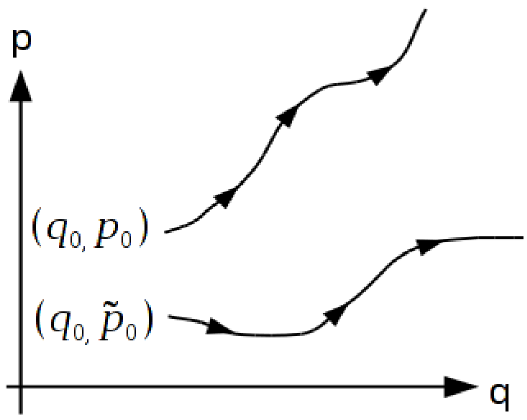

Figura 2 – Possibilidade de dois caminhos na trajetória

A formulação Hamiltoniana tem em sua particularidade a simetria (Fig. 3), o formalismo é construído de tal forma que as coordenadas q_i e p_i aparecem de forma simétrica.

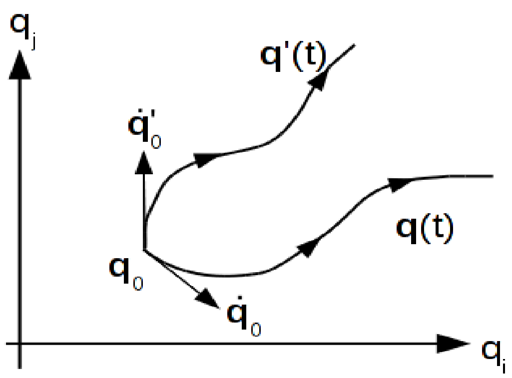

Figura 3 – simetria no espaço de fase

A função Hamiltoniana provém da equação de Euler-Lagrange, assim:

$$\frac{d}{dt}H(q,p,t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(q,p,t) \tag{3}$$

Se $q(t)$ e $p(t)$ satisfazem as equações canônicas de movimento,

$$\frac{d}{dt}H(q,p,t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Comparando as equações, vemos que

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4}$$

Em particular

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \ e \ \frac{d}{dt}H(q,p,t) = 0$$

Se a Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo t, então $H(q,p,t)$ é constante ao longo da trajetória do ponto representativo do sistema no espaço de fase, ou seja, $H(q,p)$ é uma constante do movimento.

Considerados sistemas dinâmicos simpléticos, em que o volume do espaço de fases é conservado, obedecendo ao teorema de Lioville (OTT, 2002), observa-se um mapa simplético da forma $x_{n+1} = M_N\,(x_n)$, para que a condição simplética possa ser escrita, como

$$S_N = J^T S_N J, \; sendo \; que \quad J = \left(\frac{\partial M_N}{\partial x}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

Que é a matriz Jacobiana, J^T a sua transposta, $x = (p,q) = (p_1,\ldots,p_N,\, q_1,\ldots,q_N)$ e

$$S_N = \begin{pmatrix} 0_N & -I_N \\ I_N & 0_N \end{pmatrix} \tag{6}$$

é a matriz simplética, composta por matrizes identidade I_N e matrizes nulas 0_N de ordem N, (WOELLNER, 2006).

Nos sistemas hamiltonianos e dissipativos caóticos, caracterizam-se por sensibilidade extrema às condições iniciais, manifestada pela divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas.

Aliada à contração de áreas no espaço de fase, cria uma situação inconveniente: as trajetórias divergem e ao mesmo tempo permanecem confinadas numa região finita. É possível esta situação, pela justificativa dos atratores estranhos para determinadas regiões no espaço de fase, (PELLEGRINO, 1991).

Podemos classificar as características especiais dos sistemas dissipativos, ou seja, caminhos que levam ao caos nesses sistemas, como; intermitência, cascata subarmônica de duplicação de períodos e transição para o caos a partir de movimento quasiperiódico, (PELLEGRINO, 1991).

Os sistemas dissipativos podem apresentar janelas de periodicidade dentro de regiões caóticas. A definição são os intervalos de valores dos parâmetros que comparecem às equações de movimento do sistema.

3 O EXPOENTE DE LYAPUNOV

O expoente de Lyapunov é uma das maneiras de verificar o quanto é caótico para o comportamento de um sistema dinâmico. Existe a sensibilidade às condições iniciais. Por definição, adota-se a seguinte aproximação:

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n} \tag{7}$$

onde $\varepsilon(n)$ é a distância entre os pontos na enésima medida e λ é o expoente de Lyapunov.

Se $\lambda > 0$ a distância irá aumentar enquanto que se $\lambda < 0$, irá diminuir, (WOELLNER, 2006). No caso do mapa logístico, na enésima iteração entre duas posições distanciadas inicialmente de ε ocorre:

$$f^n(x+\varepsilon) - f^n(x) \approx \varepsilon e^{\lambda n} \tag{8}$$

onde $f^n(x) = f(f(\ldots f(x)))$ n vezes.

Tomando-se o logaritmo:

$$\log_e \left[\frac{f^n(x+\varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon}\right] \approx n\lambda \tag{9}$$

Para pequenos valores de ε essa expressão se torna:

$$\lambda \approx \frac{1}{n}\log_e\left|\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x}\right| \tag{10}$$

Desenvolvendo-se a derivada $\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x}$ obtém-se, pela regra da cadeia:

$$\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x} = f'(f^{(n-1)}(x)).(f'(f^{(n-2)}(x)).(f'(f^{(n-3)}(x))...$$

$$= f'(x_{n-1}).f'(x_{n-2}).f'(x_{n-3})...$$

$$\frac{\mathrm{d}f^n(x)}{\mathrm{d}x} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \tag{11}$$

Aplicando-se a propriedade de logaritmo da multiplicação e tomando-se o limite para n tendendo a infinito:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log_e\left|f'(x_i)\right| \tag{12}$$

No caso do mapa logístico, $f'(x) = \mu(1-2x)$. Se dois pontos iniciais muito próximos convergem para um atrator *($\lambda < 0$)*, o sistema não é sensível às condições iniciais, se a distância entre eles se mantém constante *($\lambda = 0$)* o sistema está no limite e se os pontos se afastam exponencialmente *($\lambda > 0$)* o sistema é sensível (MONTEIRO, 2006).

Para que haja o aumento da distância entre os pontos iniciais em virtude da iteração é necessário que o expoente de Lyapunov seja positivo.

Observando-se o gráfico, vemos que o expoente de Lyapunov só é positivo para determinados valores de μ. Quando o expoente é positivo ocorre o comportamento caótico.

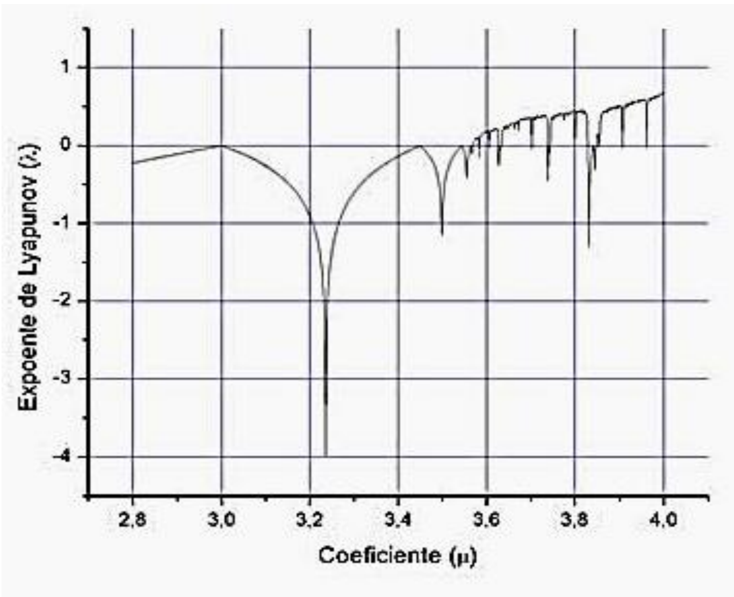

Figura 4 – Expoente de Lyapunov para valores de (μ)

Existem dois limites que devem ser obedecidos com relação à definição dos expoentes de Lyapunov:

a) a distância entre as condições iniciais deve tender a zero e

b) os valores analíticos dos expoentes são obtidos no limite do tempo (representado por uma variável discreta *n*) tendendo para o infinito.

É impossível respeitar o limite de $n \to \infty$, devemos então truncar o cálculo dos expoentes em determinado instante de tempo.

3.1 Distribuição dos Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Os expoentes de uma forma qualitativa podem ser definidos como quantificadores da taxa média exponencial de expansão ou contração de um elemento infinitesimal de volume em cada direção do espaço de fases. Existem dois tipos de expoentes positivos e os negativos, (PELLEGRINO, 1991).

Quando temos expoentes negativos, vemos a aproximação de trajetórias distintas e no caso de positivos o afastamento exponencial entre elas, tudo dentro de uma dinâmica caótica.

Os sistemas caóticos tem um comportamento muito sensível à variação das condições iniciais, são ricos em instabilidade de trajetórias no espaço de fase.

Essa riqueza de órbitas instáveis permite a eles uma imensa flexibilidade, por exemplo, se notamos que uma das características básicas dos seres vivos é a capacidade adaptativa; possivelmente os resultados matemáticos provenientes do estudo dos sistemas caóticos poderão ter importância para um melhor entendimento do comportamento dos seres vivos.

Uma ideia interessante é que ao aproveitarmos a riqueza de trajetórias instáveis dos sistemas caóticos, através de perturbações bem programadas, levamos o sistema a se comportar da maneira que se deseja ou aproximadamente. Escolhemos uma órbita que permita ao sistema realizar a forma exigida e estabilizamos essa órbita através de uma pequena perturbação adequadamente escolhida.

4 CONCLUSÃO

A determinação de critérios analíticos que possam garantir a integrabilidade ou não de sistemas dinâmicos perece de diversas dificuldades.

Analisando numericamente, percebemos sempre a possibilidade de erros comutativos, especialmente no tratamento de sistemas com possível comportamento caótico.

REFERÊNCIAS

MONTEIRO, L.H.A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

LEMOS, N. A. Mecânica Analítica. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

OTT, E. **Chaos in Dynamical Systems**. New York: Cambridge University Press, 2002.

PELLEGRINO, G. Q. **Estudo de Caos em Junções Josephson**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física, 1991.

BERNARDES, E. S. **Mecânica Clássica**. Notas de Aula. Universidade de São Paulo, Instituto de Física, 2002.

FERRARI, A. F. **Mecânica Analítica II: Mecânica Hamiltoniana e Uma Introdução A Sistemas Dinâmicos**. Notas de Aula. Universidade Federal do ABC, 2011.

WOELLNER, C. F. **Aspectos Dinâmicos de uma Rede de Mapas Hamiltonianos Acoplados**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, 2006.