

FERRAMENTA COMPUTACIONAL QUE REALIZA CÁLCULOS DE SISTEMAS LINEARES PELO TEOREMA DE CRAMER.

Ramon Oliveira Borges dos Santos

Centro Universitário Salesiano de São Paulo – Unisal

Ramonobs98@gmail.com

Wilson de Freitas Muniz

Centro Universitário Salesiano de São Paulo – Unisal

muniz@lo.unisal.br

Resumo. Atualmente os computadores tornou-se eficiente no cotidiano de algumas pessoas e organizações, com esse avanço da tecnologia e no desenvolvimento de novas linguagens de programação, viu-se necessário aplicação desse conceito em pesquisas científicas, para diminuir as chances de erros em cálculos complexos e etc. A computação científica é utilizada abundantemente nas áreas de ciências exatas, como por exemplo física, matemática, engenharia e química. Para solução de problemas numéricos, atualmente usa-se o Fortran e a Linguagem C pelo seu alto índice de aceitação entre pesquisadores, por serem flexíveis e apresentarem bons desempenhos. Este artigo visa promover a aplicação direta da linguagem de programação em um problema matemático na disciplina de cálculo numérico, foi desenvolvido um software em linguagem C, que soluciona de maneira eficiente um sistema linear com três equações e respectivamente três incógnitas sendo elas por exemplo X, Y e Z pelo teorema de Cramer.

Palavras chave: Linguagem C. Teorema de Cramer. Programação. Computação Científica.

Abstract. Currently the computers became effective in everyday life of some people and organizations, with the advance of technology and the development of new programming languages, it is necessary to apply this concept in scientific research, to decrease the chances of errors in complex calculations and etc. The scientific computing is used abundantly in the areas of exact sciences, such as physics, mathematics, engineering and chemistry. For numerical solution of problems, currently uses the Fortran and C Programming Language by its high rate of acceptance among researchers and by being flexible and make good performances. This article aims to promote the direct application of the programming language in a math problem in the discipline of numeric calculation, it was developed software in language C, that solves efficiently a linear system with three equations and three unknowns being them for example X, Y and Z by Cramer's theorem.

key words: C Programming Language. Cramer's theorem. Programming. Scientific Computing.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente necessita que os estudantes dos cursos de ciências exatas utilizem a tecnologia para solução de problemas, normalmente são utilizados software computacional para resolução de problemas complexos, essas ferramentas se apresentam aos estudantes como forma de agregar no seu conhecimento, raciocínio lógico pois grande maioria dos casos precisam programar essas máquinas, proporcionam um ganho consideravelmente de tempo e diminuem chances de erros.

O computador é uma máquina capaz de efetuar cálculos com um grupo de números e ainda adaptável para efetuar novos cálculos com um outro grupo de números. De acordo com o dicionário online Michaelis a definição de computador pode ser descrita como:

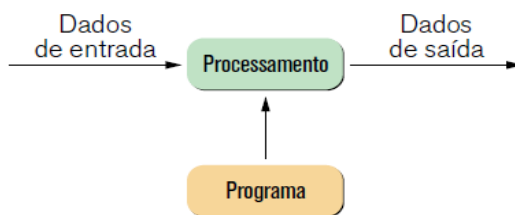
1 Aquele ou aquilo que calcula baseado em valores digitais; calculador, calculista.

2 INFORM: Máquina destinada ao recebimento, armazenamento e/ou processamento de dados, em pequena ou grande escala, de forma rápida, conforme um programa específico; computador eletrônico (Michaelis, 2018).

No campo informático um computador, basicamente, é um processador de dados, ou seja, um transformador de dados iniciais (dados de entrada) em dados finais (dados de saída) (Gotardo, 2015), como podemos notar na figura 1.

Com a descoberta do mesmo notou-se que poderiam utilizá-los para solução de problemas matemáticos. O conceito de um artefato (ou dispositivo, mecanismo) universal que realize computação foi descrito por Alan Turing em 1937, a chamada Máquina de Turing. Basicamente, uma Máquina de Turing descreve um mecanismo formal de computação, ou seja, é possível descrever a computação em si através de um conjunto de regra (Gotardo, 2015).

Figura 1. Processos do computador



Fonte: Gotardo 2015

Foi modelado um software desenvolvido em Linguagem C para solução de sistemas lineares com três linhas e três incógnitas pelo teorema de Cramer, mostrou-se bastante eficiente na sua função, usufruindo o máximo de particularidades dessa linguagem de programação esse software mostrou-se indispensável para aplicação de estudantes em resoluções de exercícios matemáticos oriundos da álgebra linear.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

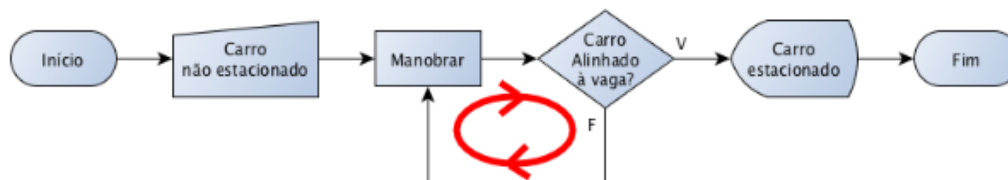
2.1 Algoritmo

É um processo de cálculo matemático ou da descrição sistemática da resolução de um grupo de problemas semelhantes. Pode-se dizer também que são regras formais para obtenção de um resultado ou da solução de um problema englobando formulas de expressões aritmética (Manzano, 2005).

Algoritmos são propostas soluções de problemas de ordem diversa, desde qual a melhor rota para um duto de petróleo até a definição de quantos passos um robô deve executar para trocar uma lâmpada (Fernandes et al, 2011).

Observa-se na figura 2, um exemplo de algoritmo para estacionar o carro.

Figura 2. Fluxograma para estacionar o carro.



Fonte: As Três Fases dos Algoritmos

A complexidade computacional de um algoritmo se refere à estimativa do esforço computacional despendido para resolver o problema e é medido pelo número necessário de operações aritméticas e lógicas como por exemplo, o número de adições e multiplicações efetuadas para resolver um sistema linear de ordem n (Filho, 2007).

2.2 Linguagem C

Nos laboratórios da empresa americana: “Bell Labs”, nos anos 70, Dennis M. Ritchie e Ken Thompson criaram a linguagem C. Com origem na linguagem B de Thompson, que foi uma evolução da linguagem BCPL. B era a primeira letra de BCPL e C a segunda, portanto os autores acharam que seria mais logico chamar de linguagem C (Reis, 2015).

A linguagem C, é utilizada no desenvolvimento de sistemas operacionais e em diversos tipos de aplicações. Tem influência direta nas linguagens C++, Java, C#, PHP e JavaScript (Reis, 2015).

O C é uma linguagem de programação genérica, sendo linguagem compacta, eficiente e poderosa. Diminuindo chances de erros nas resoluções dos cálculos, a escolha dessa linguagem decidiu-se pela aplicação em micro controladores, sites, sistemas computacionais bancários e comerciais, planilhas eletrônicas, programas para a automação industrial, programas de projeto assistido por computador, programa para a solução de problemas da engenharia, física, química e outras ciências e sistemas operacionais. A grande utilização dessa linguagem nos maiores centros de pesquisas, instituições de ensino ou até mesmo nas empresas multinacionais foi um fator relevante para a escolha da linguagem.

2.3 Sistema Linear

Uma equação linear pode ter infinitas soluções, uma única solução ou nenhuma solução. Quando ela tem infinitas soluções ou uma única solução, ela é denominada compatível (possível ou consistente). Neste caso, se tem infinitas soluções é dita indeterminada e se tem uma única solução, determinada (Hariki. S et al, 1980).

Na figura 3 nota-se um exemplo de sistema linear, se trata de um sistema linear simples com duas linhas e duas incógnitas, respectivamente na figura 4 um sistema linear com 3 linhas e 2 incógnitas.

Figura 3. Sistema linear com duas linhas e duas incógnitas.

$$S1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Fonte: Iezzi, 1977

Figura 4. Sistema linear com duas linhas e três incógnitas.

$$S2 \begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Fonte: Iezzi, 1977

Para solução de sistemas lineares mais complexos utilizam-se métodos convencionais para a resolução das incógnitas, utiliza-se diversos métodos como por exemplo: escalonamento, eliminação gaussiana, método de Gauss – Jordan, método de Cramer, método da adição entre outros. Sistemas lineares complexos que demandam grandes números de linhas e incógnitas geralmente utilizam recursos matemáticos onde escrevem o sistema em forma matricial, utilizam essa técnica para achar sua devida solução de acordo com a figura 5 foi reescrito o sistema na forma matricial.

Figura 5. Forma matricial do sistema

$$S1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Fonte: Iezzi, 1977

3. OBJETIVO

Os objetivos relevantes desse trabalho, é incentivar os estudantes para aprenderem programação aplicando a mesma no seu cotidiano para soluções de problemas simples como operações de adição ou até mesmo em problemas complexos oriundo da física, química e matemática. Auxiliando estudantes de ciências exatas a obter um recurso computacional para utilizarem em pesquisas e estudos. Outro aspecto relevante é efetuar o software de maneira simples para fácil compreensão do usuário, eficiente em sua função e principalmente ter um consumo de memória computacional baixo, não exigindo alto desempenho da máquina, assim poder distribuir o software gratuitamente a todos os interessados.

4. JUSTIFICATIVA

O aprendizado do aluno que se depara com sistemas lineares na universidade, principalmente nos cursos de engenharia, matemática e física. Sendo que na maioria dos casos esse assunto passou despercebido na vida do discente, onde futuramente poderá aplicar no meio profissional. Tais assuntos que foram sendo diluídos com tempo devido alguns alunos não saberem a real aplicabilidade ou durante os estudos deixarem esse tema para estudar posteriormente.

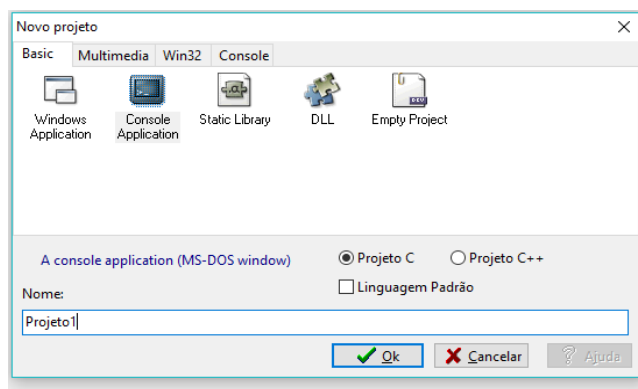
Visando na melhoria do aprendizado na sua vida acadêmica, foi imaginado uma ferramenta acessível onde pode-se ajudar esses estudantes no devido assunto, saberem se realizaram seu exercício extraclasse corretamente, assim cativando sucessivamente o discente a continuar aprofundando em seus estudos, contendo uma poderosa ferramenta em mãos podendo ser aplicadas em diversos computadores compatível com sistema operacional, não haverá termos restringindo o usuário a usufruir desse software, uma vez adquirido terá seu acesso ilimitado.

5. METODOLOGIA

5.1 Compilador

Durante a confecção do programa foi utilizado o compilador DEV-C++, uma interface gratuita onde é escrito a sintaxe da linguagem, que será convertida em linguagem máquina para o computador interpreta-lo de acordo com a sintaxe para realizar os devidos comandos. De acordo com site (TECHTUDO, 2010), o compilador Dev-C++ oferece um ambiente de desenvolvimento integrado para o desenvolvimento de aplicações. O programa possui todas as funcionalidades padrões necessárias para a escrita, compilação, debugging e execução de programas na linguagem C e C++.

Figura 6. Seleção de um novo projeto

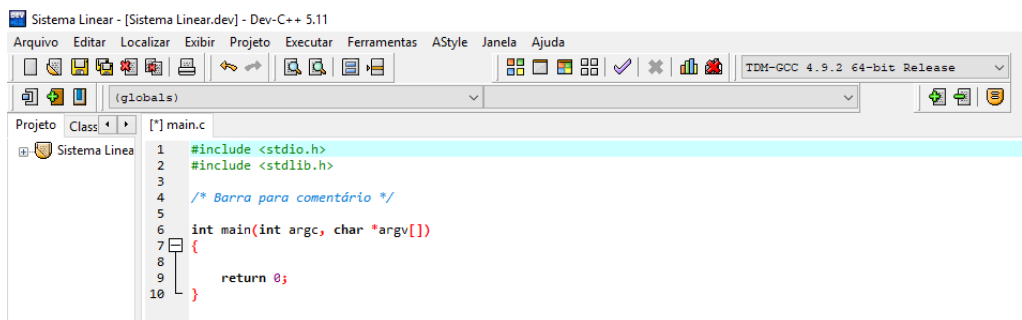


Fonte: Autoria própria

Para o desenvolvimento um novo projeto, necessita-se clicar no ícone **Console Application** como nota-se na figura 6, o compilador DEV-C++ oferece duas opções de linguagem que se possa utilizar em sua interface são ela a linguagem C e C++.

Na figura 7 encontra-se o ambiente pronto para o desenvolvimento do software, deve ser escrito dentro dos colchetes á baixo da função **int main** conhecida como função principal, vale ressaltar que é imprescindível mencionar a biblioteca necessária para o projeto, não mencionando as bibliotecas necessárias quando ocorrer a compilação da sintaxe, que constitui no processo de compilação verificando se sintaxe está digitada corretamente, assim fazendo conversão para linguagem máquina ao não mencionar as devidas bibliotecas pode ocorrer um conflito e o compilador não compreender a oque foi ordenado. O **return 0;** deve-se encontrar sempre ao final do projeto.

Figura 7. Ambiente de desenvolvimento do projeto



```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3
4 /* Barra para comentário */
5
6 int main(int argc, char *argv[])
7 {
8     return 0;
9 }
10
```

Fonte: Autoria própria

5.2 Resolução do Sistema Linear pelo Teorema de Cramer

Segundo o livro fundamentos da matemática elementar volume 4 de Iezzi (1977), descreve no capítulo VI, pagina 122-D o teorema de cramer:

Considerando um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nestas condições, A é matriz quadrada; seja $D = \det(A)$.

Teorema de Cramer

Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas.

Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Iezzi, 1977.

A solução do sistema linear pelo método de Cramer necessita-se escrever na forma matricial o sistema, seguindo algumas regras básicas chega-se a solução por meio desse método, são elas:

- 1º O sistema deve obter até 3 incógnitas comulmente orientada por X, Y e Z.

Observamos na figura 8 e onde L1, L2 e L3 representam significativamente linha 1, linha 2 e linha 3.

Figura 8. Incógnitas de um sistema linear

$$\begin{aligned} \mathbf{L1} &\rightarrow \mathbf{x - y + z = 2} \\ \mathbf{L2} &\rightarrow \mathbf{-x + 2y + 2z = 5} \\ \mathbf{L3} &\rightarrow \mathbf{5x - y + 5z = 1} \end{aligned}$$

Fonte: Iezzi, 1977.

- 2º O sistema deve obter três linhas e três colunas, sem a adição do elemento que coresponde a igualdade a equação, adicionando esse elemento deve-se obrter uma matriz de três linhas e quatro colunas, matematicamente chamada matriz de ordem 3 x 4.

Na figura 9 contempla a representação matricial do sistema anterior sem a adição do elemento correspondente a igualdade da equação, logo na figura 10 notar-se a matriz 3 x 4 juntamente com seu elemento.

Figura 9. Forma matricial do sistema sem adição da quarta coluna

$$Dz = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Iezzi, 1977.

Figura 10. Forma matricial do sistema com adição da quarta coluna

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 1 \end{array} \right]$$

Fonte: Iezzi, 1977.

Colocando um traço para diferenciar a coluna da matriz, servindo de orientação a coluna separada significa o elemento que são as respostas das linhas, futuramente utilizaremos a mesma coluna para realizar os cálculos, como podemos observar a resolução abaixo.

- 1) Realiza-se as seguintes operações, primeiramente o determinante da matriz D, onde é conhecido como determinante principal.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = 10 - 10 + 1 - (10 - 2 + 5)$$

$$D = -12$$

Logo o determinante da matriz D equivale -12

- 2) O determinante da matriz Dx, iremos substituir a primeira colunar pela coluna onde representa os resultados das equações.

$$Dx = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Dx = 20 - 2 - 5 - (2 - 4 - 25)$$

$$Dx = 40$$

- 3) Nesta etapa foi realizado o determinante da matriz Dy, substituindo a coluna que representa os resultados das equações pela segunda coluna da matriz D.

$$Dy = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Dy = 25 + 20 - 1 - (25 + 2 - 10)$$

$$Dy = 27$$

- 4) Nesta etapa foi realizado o determinante da matriz Dz, substituindo a coluna que representa os resultados das equações pela terceira coluna da matriz D.

$$Dz = 2 - 25 + 2 - (20 - 5 + 1)$$

$$Dz = -37$$

Para obter as soluções das incógnitas do sistema realizaremos as seguintes operações.

$$\begin{array}{ccc} \text{Incógnita X} & \text{Incógnita Y} & \text{Incógnita Z} \\ \mathbf{X} = \frac{Dx}{D} \quad \mathbf{X} = -\frac{10}{3} & \mathbf{Y} = \frac{Dy}{D} \quad \mathbf{Y} = -\frac{9}{4} & \mathbf{Z} = \frac{Dz}{D} \quad \mathbf{Z} = \frac{37}{12} \end{array}$$

Portanto a solução das incógnitas do sistema foi $S \left\{ -\frac{10}{3}; -\frac{9}{4}; \frac{37}{12} \right\}$, podendo também ser representado na forma decimal $S \{ -3,33; -2,25; 3,08 \}$

5.3 Software

O software necessita que o usuário entre com as equações via teclado, com isso orienta o usuário a conferir se digitou corretamente a equação, após confirmado positivamente pelo usuário o software realiza os cálculos acima e mostra na tela sua resposta, este software é de caráter público podendo ser utilizado por qualquer usuário, com conhecimentos básicos de informática, será disponibilizado gratuitamente pelo autor visando o benefício social.

6. RESULTADOS

Apresentou resultados concretos, eficientes, com uma rapidez impressionante, como pode ser visto seu funcionamento a seguir, como um dos exemplos o sistema da figura 8 calculado anteriormente na figura 11, observar - se a inicialização no software.

Figura 11. Inicialização do software

```
Esse programa calcula solucoes de sistemas lineares com 3 linhas e 3 incognitas
DIGITE O SISTEMA LINEAR EXEMPLO:
Ax+By+Cz = N
```

Fonte: Autoria própria

A seguir na figura 12 pede ao usuário digitar a primeira linha e confirmá-la se está correta.

Figura 12. Digitando a primeira linha do sistema e sua confirmação

```
<===== Digite a primeira linha =====>
Digite o valor A.....:1
Digite o valor B.....:-1
Digite o valor C.....:1
Digite o resultado da equacao.....:2
( 1.00 )X + ( -1.00 )Y + ( 1.00 )Z = 2.00
Essa linha esta correta digite sua resposta
Sim-->1
Nao-->2
Digite sua resposta.....: 1
```

Fonte: Autoria própria

Nas figuras 13 e 14 trata-se da segunda e terceira linha respectivamente.

Figura 13. Digitação da segunda linha do sistema e sua confirmação

```
<===== Digite a segunda linha =====>
Digite o valor A.....:1
Digite o valor B.....:2
Digite o valor C.....:2
Digite o resultado da equacao.....:5
                ( -1.00 )X + ( 2.00 )Y + ( 2.00 )Z = 5.00
Essa linha esta correta digite sua resposta
Sim--->1
Nao--->2
Digite sua resposta.....: 1
```

Fonte: Autoria Própria

Figura 14. Digitação da terceira linha do sistema e sua confirmação

```
<===== Digite a terceira linha =====>
Digite o valor A.....:5
Digite o valor B.....:-1
Digite o valor C.....:5
Digite o resultado da equacao.....:1
                ( 5.00 )X+ ( -1.00 )Y+ ( 5.00 )Z = 1.00
Essa linha esta correta digite sua resposta
Sim--->1
Nao--->2
Digite sua resposta.....: 1
```

Fonte: Autoria própria

O seu resultado mostra-se na figura 15, sendo esse valor obtido na tela a solução do sistema.

Figura 15. Solução para o sistema

```
X---> -3.33
Y---> -2.25
Z---> 3.08

S = {-3.33 , -2.25 , 3.08}
```

Fonte: Autoria própria

Como podemos notar, está realizando os cálculos corretamente, no próximo exemplo utilizaremos o sistema da figura 16.

Figura 16. Sistema Linear

$$S = \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{cases}$$

Fonte: Autoria própria

Na figura 17 e 18 podemos ver a entrada de dados do sistema juntamente com sua solução.

Figura 17. Entrada de dados


```
<===== Digite a primeira linha =====>
Digite o valor A.....:1
Digite o valor B.....:2
Digite o valor C.....:4
Digite o resultado da equacao.....:0

      ( 1.00 )X + ( 2.00 )Y + ( 4.00 )Z = 0.00

Essa linha esta correta digite sua resposta
  Sim-->1
  Nao-->2
Digite sua resposta.....: 1
<===== Digite a segunda linha =====>

Digite o valor A.....:3
Digite o valor B.....:1
Digite o valor C.....:2
Digite o resultado da equacao.....:0

      ( 3.00 )X + ( 1.00 )Y + ( 2.00 )Z = 0.00

Essa linha esta correta digite sua resposta
  Sim-->1
  Nao-->2
Digite sua resposta.....: 1
<===== Digite a terceira linha =====>

Digite o valor A.....:1
Digite o valor B.....:-1
Digite o valor C.....:-1
Digite o resultado da equacao.....:5

      ( 1.00 )X+ ( -1.00 )Y+ ( -1.00 )Z = 5.00

Essa linha esta correta digite sua resposta
  Sim-->1
  Nao-->2
Digite sua resposta.....: 1
```

Fonte: Autoria própria

Figura 18. Solução do sistema

```
X---> -0.00
Y---> -10.00
Z---> 5.00

S = {-0.00 , -10.00 , 5.00}
```

Fonte: Autoria própria

7. CONCLUSÃO

Conclui-se que o software mostrou um ótimo desempenho, apresentando ao usuário os resultados corretos, ele torna uma excelente ferramenta para ser utilizada no meio acadêmico e profissional, com operações extensas as chances de erros se torna relevante. O software será distribuído gratuitamente aos estudantes e professores interessados utilizar esse recurso, com intuito de ajudar o discente e docente a estudar e realizar devidas comparações matemáticas com intuito principal de ajudar academicamente e profissionalmente também vale ressaltar que outro intuito é poder despertar o interesse dos jovens para a programação.

REFERÊNCIAS

- As Três Fases dos Algoritmos** – Disponível em: <http://www.entendaprogramacao.com.br/as-tres-fases-dos-algoritmos/>. Acessado segunda-feira, 30 de abril de 2018.
- Computador** - Michaelis. (2018). Fonte: Dicionário online Michaelis: <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/Computador/>. Acessado sábado, 10 de novembro de 2018.
- DEV - C++** - Disponível em: <http://www.techtudo.com.br/tudo-sobre/bloodshed-dev-c.html>. Acessado sexta - feira, 04 de maio de 2018.
- FERNANDES, Teresa C B e LEÔNIDAS S. BARBOSA, TERESA C. B. FERNANDES, André M. C. Campos. **Takkou : Uma Ferramenta Proposta ao Ensino de Algoritmos**. XIX Workshop sobre Educação em Computação - WEI. Anais do XXXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação - CSBC., n. 1993, 2011..
- Filho, F. F. (2007). **Algoritmos Numéricos**. Rio de Janeiro : Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
- Gotardo, R. A. (2015). **Liguagem de Programação I**. Rio de Janeiro: SESES.
- Hariki. S et al, O. D. (1980). **Curso de Matemática Volume 2**. São Paulo: Harper & Row do Brasil.
- Iezzi.G, Hazzan. S (1977). **Fundamentos da Matemática Elementar 4**. São Paulo: Atual Editora.
- Reis, A. H. (2015). **Programando em linguagem C e C++**. Santa Cruz do Rio Pardo: Editora Viena.