

# **CONVECÇÃO NATURAL TRANSIENTE DUPLAMENTE DIFUSIVA EM TORNO DE UM CILINDRO ENTERRADO NUM MEIO POROSO SATURADO**

**JOSÉ RUI CAMARGO**  
**AMILCAR GOMES DE MACEDO**  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade de Taubaté

**CARLOS ALBERTO CHAVES**  
**JOSÉ CAMILO CHAVES**  
Departamento de Matemática e Física  
Universidade de Taubaté

**OSVAIR VIDAL TREVISAN**  
Faculdade de Engenharia Mecânica  
Universidade Estadual de Campinas/ UNICAMP

## **RESUMO**

Neste trabalho são apresentadas soluções numéricas para a convecção natural transiente por difusão dupla em torno de um cilindro aquecido enterrado em um meio poroso saturado, sujeito a condições de temperatura e concentração constantes no cilindro e na superfície do solo. As equações governantes são expressas nas coordenadas bipolares segundo a formulação de função de corrente e resolvidas numericamente pelo método do volume de controle. As características de transferência de calor e massa são estudadas em função do número de Rayleigh, do número de Lewis e da razão de empuxo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Transferência de calor e massa transiente, método do volume de controle.

## **INTRODUÇÃO**

Muitos processos de transporte presentes na natureza são devidos a escoamentos com a ocorrência simultânea de gradientes de temperatura e concentração. Alguns fenômenos oceanográficos como os das fontes de sal encontram explicação na presença acoplada dos gradientes térmicos e salinos. Também encontramos aplicação no controle da disseminação de contaminantes poluidores

provenientes dos sítios repositórios de lixo industrial químico e de lixo radioativo que permitem soluções para problemas na área de espalhamento radioativo nos solos, da contaminação dos lençóis hídricos e de outros correlatos que ainda continuam a reclamar solução.

Na literatura encontramos alguns trabalhos para a resolução do problema de transferência de calor na situação de regime permanente. Um estudo sobre a convecção

natural permanente promovida pela difusão dupla em meios porosos saturados foi realizado por (CHAVES, 1990). Seu trabalho propõe a resolução numérica para variações de Rayleigh (0,1000), de Lewis (0,100) e da razão de empuxo (-3, +3), utilizando-se do método do volume de controle idealizado por (PATANKAR, 1980). Este método vem sendo largamente utilizado e a sua implementação para um sistema de coordenadas bipolares foi realizada.

O presente trabalho é uma continuação do estudo realizado por (CHAVES, 1990) para o caso da convecção natural transiente duplamente difusiva em torno de cilindros enterrados em meios porosos saturados. Tal trabalho foi motivado por algumas simplificações realizadas por (FREITAS e PRATA, 1992) no problema da transferência de calor e massa em torno de cabos elétricos enterrados em meios porosos. O mesmo realiza uma análise transiente, mas efetua uma simplificação numérica assumindo que o cabo tem seção transversal quadrada, descaracterizando o problema de cilindros enterrados.

O problema da convecção natural transiente duplamente difusiva em torno de um cilindro enterrado num meio poroso saturado, sujeito a condições de temperatura e concentração constantes no cilindro e na superfície do solo, ocorre, por exemplo, em

condutores elétricos quando estão enterrados, onde o solo é o principal responsável pela retirada do calor gerado pelo condutor elétrico, através do efeito Joule. Se este solo não consegue retirar calor suficiente, a temperatura na superfície do cabo sobe e o isolamento elétrico pode ser danificado. Muitas vezes a temperatura da superfície do cabo pode chegar muito rapidamente a um nível perigoso, antes mesmo que o processo atinja o regime permanente. A situação em discussão caracteriza um problema de transporte de calor e massa acoplados, em regime transiente, em meios porosos saturados, onde o objetivo desta investigação é determinar se o cabo elétrico está em uma condição segura de funcionamento.

## PROPOSIÇÃO

Consideramos o problema de um cilindro infinito enterrado em um meio poroso saturado. O cilindro tem raio  $r_1$  e está enterrado a uma profundidade  $d$  da superfície superior do meio poroso. A parede externa do cilindro é mantida a uma temperatura  $T_w$  e a uma concentração  $C_w$ , constantes, enquanto a superfície superior do meio poroso é mantida a uma temperatura  $T_s$  e a uma concentração  $C_s$ , conforme a Figura 1. As hipóteses de regime transiente e parede impermeável também são consideradas.

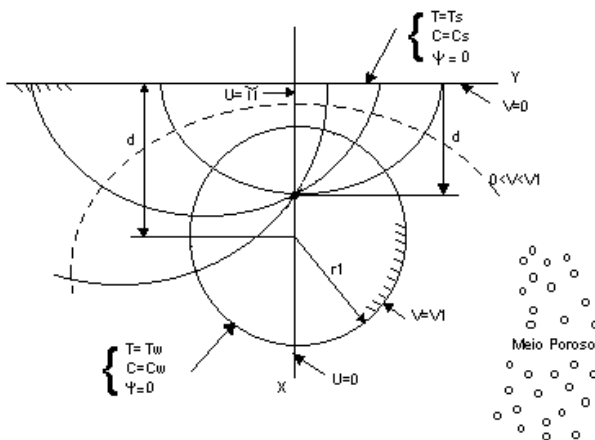


Figura 1 – Sistema de coordenadas bipolares

Para a obtenção das equações que descrevem o problema, assumimos que:

- 1- O meio poroso e o fluido que o satura são homogêneos e isotrópicos.
- 2- A aproximação de Boussinesq é válida para variações de densidade devido a mudanças tanto de temperatura quanto de concentração.
- 3- Assumimos a validade da Lei de Darcy para descrever o escoamento do fluido no meio poroso.
- 4- A matriz porosa é rígida e consideramos as demais propriedades termodinâmicas do fluido (à exceção da densidade no termo de empuxo) e da matriz porosa como constantes.
- 5- Não ocorrem reações químicas e a dissipação viscosa é desprezível.
- 6- O meio poroso e o fluido apresentam equilíbrio termodinâmico local, e portanto a

temperatura do sistema se refere indistintamente à matriz sólida e ao fluido que a satura

Baseado nas hipóteses por nós consideradas, as equações governantes do problema da convecção natural duplamente difusiva em meios porosos podem ser escritas para regime transiente e fluidos incompressíveis nas coordenadas bipolares  $(u, v)$  (SPIEGEL, 1976) em termos adimensionais por:

$$\nabla^2 \Psi^* = a^* \left[ \left( H \frac{\partial T^*}{\partial u} + G \frac{\partial T^*}{\partial v} \right) + N \left( H \frac{\partial C^*}{\partial u} + G \frac{\partial C^*}{\partial v} \right) \right] \quad (1)$$

$$\nabla^2 T^* = (a^*)^2 \cdot F \cdot \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \text{Ra} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial v} \frac{\partial T^*}{\partial u} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial u} \frac{\partial T^*}{\partial v} \right) \quad (2)$$

$$\nabla^2 C^* = (a^*)^2 \cdot F \cdot \text{Le} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \text{Ra Le} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial v} \frac{\partial C^*}{\partial u} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial u} \frac{\partial C^*}{\partial v} \right) \quad (3)$$

onde:

$$a^* = \frac{a}{r_1} = \sinh v_1$$

$$d^* = \frac{d}{r_1} = \cosh v_1$$

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_w - T_s}$$

$$t^* = \frac{\alpha}{r_1^2} \cdot t$$

$$C^* = \frac{C - C_s}{C_w - C_s}$$

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{(\alpha \cdot Ra)}$$

$$Ra = \frac{K \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot r_1}{(\nu \alpha)}$$

$$\Delta T = T_w - T_s$$

$$\Delta C = C_w - C_s$$

$$u = 0 \quad v_1 < v \leq 0 \Rightarrow \Psi^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial v} = \frac{\partial C^*}{\partial v} = 0$$

$$u = \pi \quad v_1 < v < 0 \Rightarrow \Psi^* = 0, \frac{\partial T^*}{\partial v} = \frac{\partial C^*}{\partial v} = 0$$

$$v = v_1 \quad 0 \leq u \leq \pi \Rightarrow \Psi^* = 0, T^* = C^* = 1$$

$$v = 0 \quad 0 \leq u \leq \pi \Rightarrow \Psi^* = 0, T^* = C^* = 0 \quad (4)$$

## MÉTODO

Para resolvermos numericamente o problema, integramos as equações 1-3 em relação às variáveis  $u$  e  $v$ , já escritas em coordenadas bipolares adimensionalizadas sobre um volume de controle genérico. Tal domínio é descrito na Figura 1 e a integração é feita conforme a formulação do Método do Volume de Controle desenvolvido por (PATANKAR, 1980) onde adotamos o esquema da lei de potência, para o cálculo dos termos de fluxo através das fronteiras de cada volume de controle interno.

Em termos adimensionais no novo sistema de coordenadas  $(u,v)$  estabelecemos as seguintes condições iniciais e de contorno conforme o domínio mostrado na Figura 1:

$$\text{Para } t^* = 0$$

$$\text{temos } \Psi^* = 0, T^* = C^* = 0$$

$$\text{Para } t^* > 0$$

As condições de contorno 4 se referem ao domínio semi-infinito do escoamento envolvendo o cilindro aquecido.

As equações discretizadas junto com as condições de contorno e iniciais formam um sistema acoplado envolvendo as variáveis função de corrente, temperatura e concentração. Trataremos da solução numérica deste sistema com o emprego do esquema SIMPLE idealizado por (PATANKAR, 1980). Para resolução das equações algébricas simultâneas que resultaram do processo de discretização, utilizamos o método iterativo linha a linha.

Como estado inicial consideramos as aproximações iniciais  $\Psi^* = 0$  (fluido estagnado) e  $T^* = C^* = 0$ . Para  $t > 0$  consideramos as aproximações iniciais  $\Psi^* = 0$  (fluido estagnado) e  $T^* = C^* = 1$  (temperatura e concentração uniformes) em todo o domínio.

Em cada iteração do processo de simulação houve a necessidade de atualizarmos os valores de  $\Psi^*, T^*$  e  $C^*$ . A equação de  $\Psi^*$

era resolvida 3 vezes a cada iteração. Para  $T^*$  e  $C^*$  atualizamos apenas uma vez por iteração. Tal procedimento foi bastante útil para os casos de  $Ra$  e  $Le$  altos, que provocavam fortes correntes convectivas.

O critério de aceitação de uma solução como convergida se baseou no máximo erro dentro de todo o domínio de cálculo. A convergência dos resultados obtidos foi aceita quando as mudanças relativas nas variáveis dependentes estavam abaixo de  $1 \times 10^{-5}$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme mostrado na Tabela 1 e Figuras 2 e 3 para tempos curtos, o cálculo obtido através

do programa implementado para transiente mostra elevadas taxas de transferência de calor e de massa além de valores elevados de Nusselt e de Sherwood. Tais fatos se devem as condições iniciais e de contorno impostas ao problema do cilindro enterrado. Para tempos longos o programa implementado também apresenta resultados confiáveis, visto que os valores apresentados para Nusselt e Sherwood apresentados na Tabela 1 estão se estabilizando e se aproximam bastante dos valores encontrados em (CHAVES, 1990) para regime permanente.

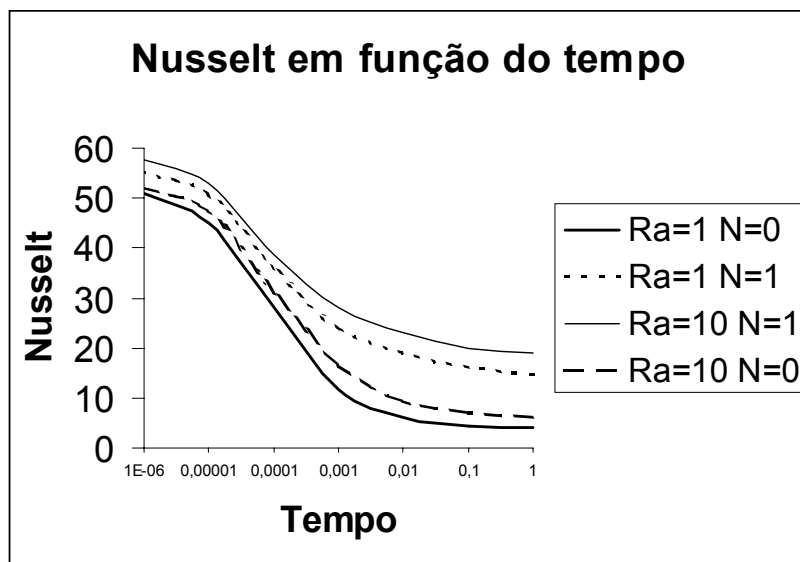
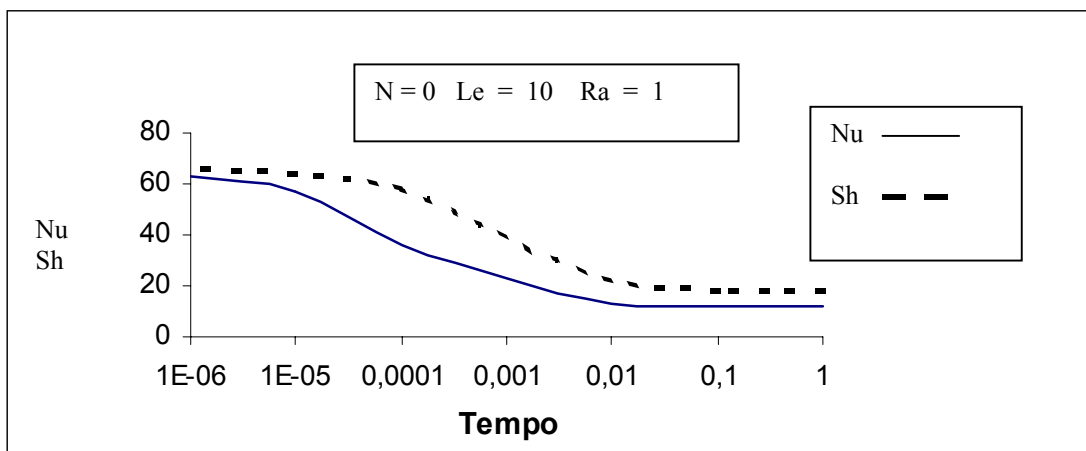


Figura 2 - Nusselt em função do tempo para  $Le = 1$

Tabela 1 - Nusselt e Sherwood em função do tempo ( $N = 1,0$   $Ra = 1,0$   $Le = 10,0$ )

| Tempo    | Nusselt | Sherwood |
|----------|---------|----------|
| 1        | 11,76   | 17,66    |
| 0,1      | 12,45   | 18,43    |
| 0,01     | 13,32   | 22,48    |
| 0,001    | 22,55   | 39,21    |
| 0,0001   | 36,19   | 58,16    |
| 0,00001  | 55,07   | 64,56    |
| 0,000001 | 63,32   | 65,87    |

Figura 3 - Nusselt e Sherwood em função do tempo ( $N = 1,0$   $Ra = 1,0$   $Le = 10,0$ )

## CONCLUSÕES

O estudo da convecção natural transiente duplamente difusiva para um cilindro enterrado num meio poroso homogêneo e saturado foi investigada numericamente. As equações de conservação que descrevem o problema foram expressas nas coordenadas bipolares segundo a

formulação função de corrente e resolvidas numericamente pelo método do volume de controle. Os resultados apresentados foram considerados com um critério de aceitação da solução como convergida não permitindo um erro relativo acima de  $1 \times 10^{-5}$ . Adotamos também um esquema de lei de potência para aproximação

das variáveis temperatura, concentração e função de corrente adimensionais (PATANKAR, 1980).

Nos escoamentos transientes verificamos os bons resultados do programa implementado para tempos curtos e tempos longos, o que permitirá uma aplicabilidade do programa para as situações de cabos elétricos enterrados em meios porosos saturados.

## ABSTRACT

In this work numerical solutions are presented for the transient natural convection heat transfer by double diffusion from a heated cylinder buried in a saturated porous medium where both the cylinder and the medium surfaces are maintained at constant uniform temperature and concentration. The governing equations are expressed in bicylindrical coordinates in the stream function formulation and handled numerically by a control-volume method. Heat and Mass Transfer are studied as a function of Rayleigh number, Lewis number and the buoyancy ratio number. Transient convection.

KEY-WORDS: Heat and mass transfer transient, Control-volume numerical method

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAVES, C. A., Convecção natural duplamente difusiva em torno de um cilindro enterrado

num meio poroso saturado. Tese de Doutorado, Campinas: FEC-UNICAMP, 1990.

PATANKAR, S., Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere, 1980.

SPIEGEL, M. R., Análise vetorial. São Paulo: McGraw – Hill do Brasil, 1976.

## NOMENCLATURA

- a fator de escala para coordenadas bipolares,  $a = r_1 \sinh v_1$ , adimensional
- C concentração do constituinte químico,  $[kg/m^3]$
- d profundidade do cilindro à superfície superior,  $d = r_1 \cosh v_1$ , [ m ]
- D difusividade de massa do constituinte no meio,  $[ m/s^2 ]$
- $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_z$  versores nas coordenadas bipolares, adimensionais
- F função, definida nas Eqs. 2 e 3,  $F = \frac{1}{(\cosh v - \cos u)^2}$ , adimensional
- g aceleração da gravidade,  $[ m/s^2 ]$
- G função, definida na Eq. 1,  $G = \frac{\sinh v \cdot \sin u}{(\cosh v - \cos u)^2}$ , adimensional
- $h_u, h_v, h_z$  fatores de escala na mudança para variáveis bipolares, adimensionais

H função, definida na Eq.1,

$$H = \frac{1 - \cos u \cdot \cosh v}{(\cosh v - \cos u)^2}, \text{ adimensional}$$

k condutividade térmica efetiva do meio poroso saturado, [W/K]

K permeabilidade do meio poroso, [m<sup>2</sup>]

Le número de Lewis,  $\alpha/D$ , adimensional

m parâmetro da grade, número de nós na direção u, adimensional

n parâmetro da grade, número de nós na direção v, adimensional

N razão de empuxo, adimensional

Nu número de Nusselt médio, adimensional

P pressão, [Pa]

q fluxo de calor local, [W/m<sup>2</sup>]

Q luxo de calor total por unidade de comprimento do cilindro, [W/m]

r<sub>1</sub> raio do cilindro enterrado, [m]

Ra número de Rayleigh modificado, adimensional

Sh número de Sherwood Médio, adimensional

T temperatura, [K]

u, v coordenadas bipolares, [m]

V velocidade média, [m/s]

V<sub>u</sub>, V<sub>v</sub> velocidades nas direções u e v, [m /s]

v<sub>1</sub> valor da coordenada v sobre o cilindro, [m]

x, y coordenadas cartesianas, [m]