

Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas

COMPARISON OF THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL VIBRATIONS MODES IN BEAMS WITH CRACKS

Eurico Arruda Filho
Universidade Estadual Paulista

Francisco José Grandinetti
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Taubaté

RESUMO

Este trabalho descreve a modelagem a parâmetros concentrados, a implementação experimental e o estudo da dinâmica, que permitam a identificação e a estimativa da posição de trincas em vigas, através da análise dos modos naturais de vibração. Os modos naturais de vibração experimental são obtidos em um aparato experimental formado por: um dispositivo para excitação da estrutura, um transdutor e um analisador de espectro, possibilitando a obtenção das informações de resposta em frequência. A modelagem dinâmica e a análise modal experimental são aplicadas na investigação de vigas que possuam fissuras ou trincas permitindo uma avaliação da resposta que a estrutura dará aos efeitos das cargas.

PALAVRAS-CHAVE

Trincas, Modelagem Matemática, Análise Modal, Parâmetros Concentrados, Modos de Vibração.

INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é realizar a modelagem de uma viga bi-engastada que poderá ser de material metálico ou não-metálico a parâmetros concentrados, com a finalidade de se localizar regiões com trinca na estrutura através das frequências dos modos naturais de vibração. Desta forma, partindo-se do modelo de uma viga contínua com dois graus de liberdade, obtém-se as equações de movimento aplicando-se a Equação de Lagrange. Admitindo-se dois casos de viga contínua, com e sem trinca, pode-se determinar os autovalores e autovetores, que nos fornecem as frequências naturais para cada caso. De posse destes dados, estima-se a localização da trinca, considerando-se que a rigidez no local onde ocorre a trinca sofre alteração devido à variação da

superfície transversal da viga. Efetua-se a comparação dos modos obtidos teoricamente através do método dos parâmetros concentrados com os resultados experimentais de uma viga de mesmas condições do estudo teórico.

Os modelos determinam as frequências naturais de vibração das vigas sempre em função da sua geometria e das suas propriedades mecânicas, possibilitando aplicar a análise do comportamento vibratório para se realizar controle do estado do elemento em condições de fadiga não localizada, e para a detecção e acompanhamento de propagação de trincas.

EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E COORDENADAS ACOPLADAS

A equação de movimento expressa o deslocamento como uma função do tempo, ou seja, apresenta a distância entre a posição instantânea da massa durante seu movimento e a posição de equilíbrio.

As equações diferenciais de movimento podem ser acopladas. O conceito de ação acoplada reside em que a vibração em uma região do sistema induz vibração em outra região do mesmo sistema devido à força que é transmitida através da mola acoplada. Há dois tipos de acoplamento: o acoplamento estático devido a deslocamentos estáticos que existe se a matriz de rigidez é não-diagonal e, acoplamento dinâmico, devido a forças de inércia, que existe se a matriz de massa é não-diagonal (THOMSON, 1973).

Pode-se encontrar também um sistema de coordenadas que não apresente acoplamento, pois

cada equação poderá conter somente uma quantidade desconhecida. Neste caso, as equações de movimento podem ser resolvidas independentemente uma da outra, de forma desacoplada. Estas coordenadas são denominadas coordenadas principais ou coordenadas normais

MODELO A PARÂMETROS CONCENTRADOS DE UMA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Neste trabalho enfatiza-se um método aproximado para localizar trinca em estruturas metálicas e não metálicas. Inicia-se com o modelo de uma viga bi-engastada sem trinca e posteriormente compara-se com um modelo de uma viga bi-engastada com trinca, considerando um modelo discreto com dois graus de liberdade.

MODELO MATEMÁTICO SEM TRINCA

Na figura 1 tem-se uma viga bi-engastada, e a figura 2 mostra o modelo analítico de um sistema com duas massas ideais, ligadas às paredes e entre si por molas ideais.



Figura 1 - Viga bi-engastada

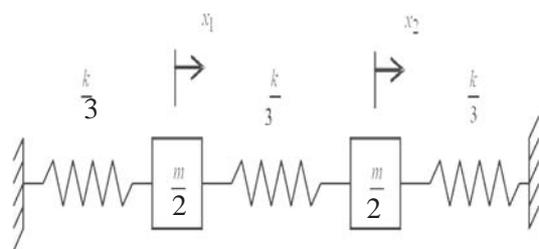


Figura 2 - Sistema não amortecido de dois graus de liberdade.

A energia do sistema consiste de cinética T devida ao movimento das massas, e energia potencial V devida à ação da mola de acoplamento K . Assim, aplicando o Método de Lagrange para cálculo da equação do movimento, cujo modelo refere-se um sistema não amortecido de 2 GDLs, determina-se as equações de movimento dinâmico, que podem ser expressas na notação matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}k & -\frac{1}{3}k \\ -\frac{1}{3}k & \frac{2}{3}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou ainda,

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (9)$$

Pré-multiplicando pelo inverso da matriz de massa, tem-se:

$$[I]\{\ddot{x}\} + [D]\{x\} = \{0\} \quad (10)$$

Admitindo o movimento harmônico $[\ddot{x}] = -\lambda [x]$ sendo que $\lambda = \omega^2$ tem-se que $[D - \lambda I]\{x\} = \{0\}$ ou seja,

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} \frac{k}{m} - \lambda & -\frac{2}{3} \frac{k}{m} \\ -\frac{2}{3} \frac{k}{m} & \frac{4}{3} \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

o determinante acima conduz à equação característica:

$$\lambda^2 - \frac{8}{3} \frac{k}{m} \lambda + \frac{12}{9} \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

Como foram desprezados o amortecimento e o vetor de forças, ficou caracterizado um problema de vibração livre não amortecido, levando a um problema de autovalor e autovetor. O vetor de forças pode ser desprezado porque as frequências e os modos naturais de vibração são características exclusivas da estrutura, portanto independem do carregamento externo aplicado. Este problema de autovalor e autovetor possibilita o desacoplamento das equações integrantes do sistema de movimento dinâmico anteriormente descrito, obtendo-se com estes autovetores os correspondentes modos naturais de vibração, e com seus autovalores associados às frequências naturais de vibração (MEIROVITCH, 1986).

Pode-se então obter os autovalores, que são as duas raízes associadas ao polinômio característico apresentado na equação 13

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \frac{k}{m} \quad (14)$$

$$\lambda_2 = 2 \frac{k}{m} \quad (15)$$

Sabe-se que $\lambda = \omega^2$ as, podemos encontrar frequências naturais do sistema:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}} \quad (16)$$

$$\omega_2 = \sqrt{2 \frac{k}{m}} \quad (17)$$

Efetuada a substituição dos valores de λ_1 e λ_2 na equação matricial 11 e normalizadas as colunas, teremos o primeiro e segundo autovetores, que são respectivamente:

$$\{x\}_1 = \begin{Bmatrix} -1,000 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\{x\}_2 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

As figuras 3 e 4 a seguir, representam os dois modos normais.

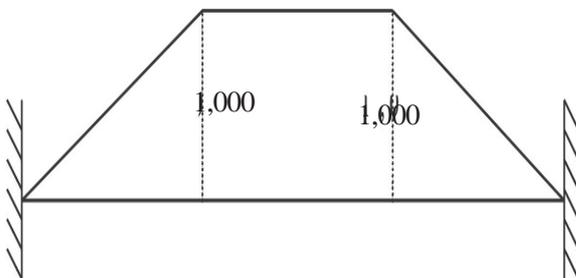


Figura 3 - 2º Modo normal para $\omega_1^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{m}$

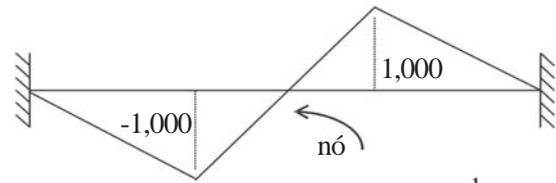


Figura 4 - 2º Modo normal para $\omega_2^2 = 2 \frac{k}{m}$

Modelo Matemático Considerando Trinca

Deve-se analisar dois casos: Modelo com trinca na região central e Modelo com trinca próxima ao engaste.

Modelo com trinca próxima da posição central

Na figura 5.a tem-se uma viga bi-engastada e a figura 6 mostra o modelo analítico de um sistema com duas massas ideais $\frac{m}{2}$ ligadas às paredes e entre si

por molas ideais $\frac{k_1}{3}$ e $\frac{k_2}{3}$

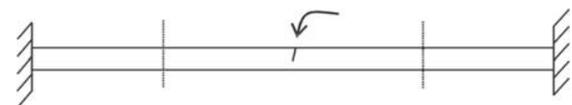


Figura 5 - Viga bi-engastada com trinca próxima ao centro

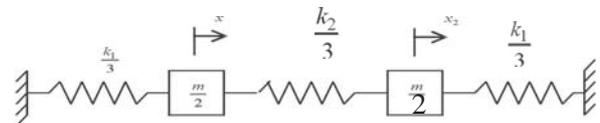


Figura 6 - Sistema não amortecido de dois graus de liberdade

Pode-se então obter a função Lagrangeana L para o sistema:

$$L = \frac{1}{4}(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2) - \frac{1}{6}k_1x_1^2 - \frac{1}{6}k_2(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{6}k_1x_2^2 \quad (21)$$

As equações de movimento serão:

$$\frac{m}{2}\ddot{x}_1 + \frac{1}{3}(k_1 + k_2)x_1 - \frac{1}{3}k_2x_2 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{m}{2}\ddot{x}_2 - \frac{1}{3}k_2x_1 + \frac{1}{3}(k_2 + k_1)x_2 = 0 \quad (23)$$

As equações de movimento dinâmico podem ser expressas na notação matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (24)$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(k_1+k_2) & -\frac{1}{3}k_2 \\ -\frac{1}{3}k_2 & \frac{1}{3}(k_2+k_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Efetuada a pré-multiplicação pelo inverso da matriz de massa tem-se:

$$[I]\{\ddot{x}\} + [D]\{x\} = \{0\} \quad (26)$$

Fazendo $[D - \lambda I]\{x\} = \{0\}$,

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) - \lambda & -\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} \\ -\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} & \frac{2}{3}\left(\frac{k_2+k_1}{m}\right) - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Formando o determinante $|D - \lambda I| = 0$ a equação 26 fica:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) - \lambda & -\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} \\ -\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} & \frac{2}{3}\left(\frac{k_2+k_1}{m}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

Conduzindo à equação característica:

$$\lambda^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)\lambda + \frac{4k_1^2 + 8k_1k_2}{9m^2} = 0 \quad (29)$$

Pode-se então obter os autovalores, que são as duas raízes associadas ao polinômio característico apresentado na equação 28.

$$\lambda_1 = \frac{2k_1 + 4k_2}{3m} \quad (30)$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{k_1}{m} \quad (31)$$

As frequências naturais do sistema são:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k_1 + 4k_2}{3m}} \quad (32)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k_1}{m}} \quad (33)$$

Pode-se obter as equações algébricas lineares homogêneas:

$$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) - \lambda \right] x_1 - \frac{2}{3}\frac{k_2}{m} x_2 = 0 \quad (34)$$

$$-\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} x_1 + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{k_2+k_1}{m}\right) - \lambda \right] x_2 = 0 \quad (35)$$

Sendo que, para movimentos periódicos compostos de movimentos harmônicos de várias amplitudes e frequências, pode-se fazer como uma dessas componentes:

$$x_1 = A \text{sen}(\omega t + \psi) \quad (36)$$

$$x_2 = B \text{sen}(\omega t + \psi) \quad (37)$$

onde, A, B e ψ são constantes arbitrárias, e ω é uma das frequências naturais do sistema.

Substituindo os valores de x_1 e x_2 nas equações 33 e 34, e fazendo as devidas simplificações tem-se:

$$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) - \lambda \right] A - \frac{2}{3}\frac{k_2}{m} B = 0 \quad (38)$$

$$-\frac{2}{3}\frac{k_2}{m} A + \left[\frac{2}{3}\left(\frac{k_2+k_1}{m}\right) - \lambda \right] B = 0 \quad (39)$$

Pode-se assim obter a razão das amplitudes:

$$\frac{A}{B} = \frac{2k_2}{2(k_1+k_2) - m\lambda} \quad (40)$$

$\lambda_1 = \frac{2k_1 + 4k_2}{3m}$ e $\lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{k_1}{m}$ e pode-se encontrar o primeiro e segundo modos normais, que são respectivamente:

$$\{k_1\} = \begin{pmatrix} -1,000 \\ 1,000 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\{k_2\} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 1,000 \end{pmatrix} \quad (42)$$

As figuras 7 e 8 a seguir, representam os dois modos normais.

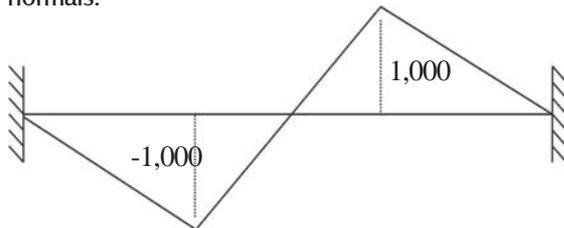


Figura 7 - 1º Modo normal para $\omega_1^2 = \frac{2k_1 + 4k_2}{3m}$

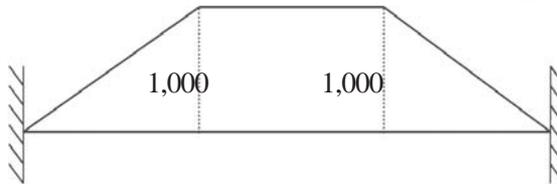


Figura 8 - 2º Modo normal para $\omega_2^2 = \frac{2}{3} \frac{k_1}{m}$

MODELO COM TRINCA NA POSIÇÃO PRÓXIMA AO ENGASTE

Na figura 9.a tem-se uma viga bi-engastada, apresentando uma trinca próxima ao engaste, e a figura 10 mostra o modelo analítico de um sistema com duas massas ideais $\frac{m}{2}$ ligadas às paredes e entre si por molas ideais k_1 e k_2 .

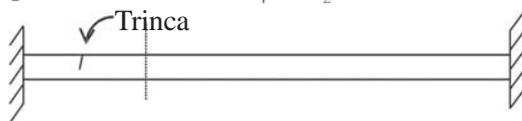


Figura 9 - Viga bi-engastada com trinca próxima à extremidade

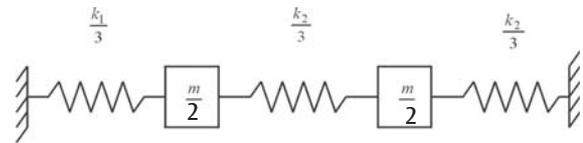


Figura 10 - Sistema não amortecido de dois graus de liberdade

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, pode-se determinar as frequências naturais do sistema que são respectivamente:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 3k_2 - \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k_2^2}}{3m}} \quad (43)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 3k_2 + \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k_2^2}}{3m}} \quad (44)$$

OBTENÇÃO DOS MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Os modos naturais de vibração foram obtidos de modo teórico e de modo experimental, sendo posteriormente apresentados nas tabelas 2 e 3.

MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO TEÓRICOS

São determinados utilizando os conceitos apresentados e as fórmulas obtidas no estudo das vigas a parâmetros concentrados, mediante a utilização dos valores correspondentes a cada caso de viga, que podem ser encontrados na tabela 1 a seguir

Tabela 1 - Valores das constantes correspondentes às vigas de concreto e madeira

	Viga de Concreto	Viga de Madeira
Módulo de Elasticidade	E = 210 000 kg/cm ²	E = 160 000 kg/cm ²
Momento de Inércia (sem trinca)	I = 8,64 . 10 ⁻⁶ m ⁴	I = 8,64 . 10 ⁻⁶ m ⁴
Momento de Inércia (com trinca)	I = 3,65 . 10 ⁻⁶ m ⁴	I = 3,65 . 10 ⁻⁶ m ⁴
Rigidez sem trinca:	k=34 836 480 Pa.m	k=2 6 542 080 Pa.m
Rigidez com trinca:	k=17 496 000 Pa.m	k=11 197 440 Pa.m
Massa da Viga	m = 17 kg	m = 7 kg

MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO EXPERIMENTAIS

Na sua forma clássica, a Análise Modal consiste em se determinar experimentalmente um conjunto de funções resposta em frequência e a partir delas extrair, com auxílio de um programa computacional, os parâmetros modais do sistema. O equipamento utilizado no experimento foi o seguinte:

1. Dispositivo para excitação da estrutura (martelo piezoelétrico);
2. Transdutor para medição da grandeza de interesse;

3. Analisador de espectro "HP35660a" que permitiu extrair as informações de resposta em frequência, e sinais temporais dos canais de entrada e saída, e a função coerência.

A excitação da estrutura foi efetuada com contato através de um martelo de impacto, que nada mais é do que um peso associado a uma célula de carga ou transdutor de força para medição da intensidade da força aplicada. As vigas foram submetidas a ensaio em uma estrutura especial desenvolvida no Departamento de Engenharia Civil em conjunto com o Departamento de Engenharia Mecânica, para experimentos com vigas de porte.

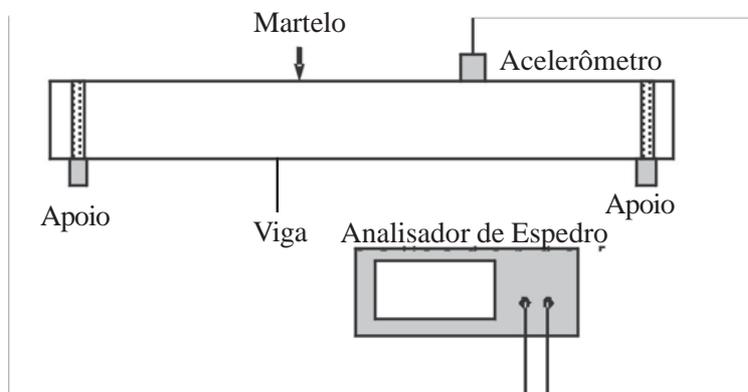


Figura 11 - Aparato experimental

Tabela 2 Resultados teóricos e experimentais de frequência (Hz)

	Viga de Concreto				Viga de Madeira			
	Resultados				Resultados			
	Teórico		Experimental		Teórico		Experimental	
	1º Modo	2º Modo	1º Modo	2º Modo	1º Modo	2º Modo	1º Modo	2º Modo
Sem Trinca	186,12	322,36	166,00	398,00	253,17	438,50	252,00	440,00
Trinca Central	186,12	263,90	166,00	334,00	253,17	343,77	256,00	312,00
Trinca Próxima ao Apoio	154,91	250,91	158,00	318,00	199,57	324,63	216,00	348,00

Analisando os resultados teóricos, pode-se constatar que quando a trinca encontra-se na região central o segundo modo sofre uma redução de valor, por outro lado quando a trinca está na região próxima ao apoio o primeiro modo se reduz e o segundo modo fica com valor próximo ao obtido para o segundo modo do caso com trinca central, tanto para viga de concreto como também para viga de madeira. Os resultados experimentais constataram de forma aproximada os cálculos teóricos.

CONCLUSÃO

A escolha de um modelo simples a parâmetros concentrados teve como objetivo identificar os modos naturais de vibração de vigas com e sem entalhes, propiciando um bom resultado tendo em vista que estamos tratando de vigas com entalhes e que possuem um comportamento dinâmico totalmente não linear. Desta forma, o modelo utilizado foi eficaz quando comparamos as frequências dos modos teóricos com as dos modos experimentais, e nesta análise pode-se afirmar que os autovalores variam com a po-

sição da trinca, o que não ocorre com os autovetores, como mostram as tabelas 1 e 2.

Pode-se concluir que ao realizar um ensaio para identificação da presença de trincas em estruturas, a variação das frequências dos modos de vibração possibilitará posicionar a trinca, entalhe ou fissura próxima a região central ou próxima ao apoio ou engaste.

Assim, esse trabalho é embrionário nas pesquisas de sistemas estruturais, principalmente em construção civil onde as trincas se desenvolvem lentamente, pois pode-se a partir deste, melhorar o modelo, bem como utilizar modelos de sistemas contínuos e utilizar o método dos elementos finitos para novos ensaios, e até mesmo para desenvolver uma nova metodologia de identificar sistemas estruturais com trincas.

Esse trabalho pode ser realizado a partir da aplicação de diversas ferramentas, tais como: técnicas de modelagem à parâmetros concentrados e análise experimental, e com a integração dos Departamentos de Engenharia Mecânica e Engenharia Civil.

Apesar do modelo utilizado ser simples, a utilização deste no estudo de trincas mostra a relevância do trabalho, visto que existem poucos trabalhos publicados nesta área.

Para projetos futuros iniciaremos novos estudos com objetivo de facilitar o cálculo e garantir regiões com trincas através dos modos naturais de vibração, utilizando modelos de sistemas contínuos e em paralelo o método dos elementos finitos.

ABSTRACT

The objective of this work is to describe the modeling to concentrated parameters, the experimental implementation and the study of the dynamics that allow the identification and estimate the position of crack in beams, through the analysis of the natural manners of vibrations. The natural manners of experimental vibration are obtained in an experimental apparatus formed by: a device for excitement of the structure, a transmuted and a spectrum analyzer to obtain answers from the information in frequency. The dynamic modeling and the experimental modal analysis are applied in the control of beams that possess split or crack that permit an estimate of an answer that the structure will give to the effect of the loads.

KEY-WORDS

Crack, Modeling, Modal Analysis, Concentrated Parameters, Modes of Vibration.

REFERÊNCIAS

EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd., England, 1986.

INMAN, D. J., *Vibration With Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall International Inc. USA, 1989, 351p.

MEIROVITCH, L., *Dynamics and Control of Structures*, Wiley-Interscience Publication, 1990, 425p.

MEIROVITCH, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1986, 560p.

PASTOUKHOV, V. A., Dias, J. C., Silva, D. J., "Um Modelo Acoplado de Vibrações em Sólidos Sujos a Acumulação de Danos Dispersos ou Localizados", 8º Congresso Chileno de Ingeniería Mecánica, Universidad de Concepción - Chile, 1998

PASTOUKHOV, V. A., Voorwald, H. J.C., *Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural*, Editora UNESP, 1995.

THOMSON, W. T., *Teoria da Vibração*, Editora Interciência, 462p., 1973

SOUZA, Luiz Antonio de, C., Moura A., S., Oliveira A. H. *Determinação do fator de intensidade de tensão dinâmico em trincas planas*. In: XX CILAMCE, 1999, Anais. São Paulo - SP - Brasil: 1999. v.CD-ROM. p.1-9.

SOUZA, Luiz Antonio de, N.F.F., Becken. *The line spring model to fatigue life prediction for surface cracks in shell structures*. *Engineering Fracture Mechanics*, USA, n.Submetido, 2000.