

# Simulação da Estimação Simultânea da Temperatura do Gás e a Emissividade num Forno Utilizando Análise Inversa em Radiação Térmica

Carlos Teófilo. Salinas Sedano  
Departamento de Engenharia Mecânica – UNITAU.  
Contato para correspondência:  
[csalinas@unitau.br](mailto:csalinas@unitau.br)  
[csalinas\\_99@yahoo.com](mailto:csalinas_99@yahoo.com)

## RESUMO

*A utilização de técnicas de análise inversa em problemas de radiação térmica tem muitas aplicações em engenharia, por exemplo, a predição do campo de temperaturas em fornos. Em problemas diretos em radiação são conhecidos o termo fonte de calor, as propriedades do meio e as condições de contorno, e precisa-se estimar o campo de intensidades. Por outro lado em muitas situações práticas, desconhecem-se as propriedades do meio ou as condições de contorno. Neste trabalho, utiliza-se o método do gradiente conjugado conjuntamente com o método das ordenadas discretas para estimar simultaneamente o campo de temperatura num forno e a emissividade das superfícies. O meio dentro do forno é simulado, considerando um gás de combustão que ocupa o espaço entre duas superfícies cinzentas paralelas. O gás é considerado cinzento, absorvente, emissor e com espalhamento isotrópico. O problema inverso é formulado como um problema de otimização que minimiza o erro entre a intensidade de radiação calculada, saindo nas superfícies de contorno e a intensidade de radiação de medições experimentais simuladas. Apresentam-se os passos da análise inversa: problema direto, problema de sensibilidade e a equação gradiente. Os resultados numéricos são obtidos considerando dados experimentais simulados sem e com ruído. O campo de temperatura e a emissividade das superfícies são estimados com aceitável precisão.*

**PALAVRAS-CHAVE:** Radiação, análise inversa, método do gradiente conjugado, distribuição de temperatura.

## ***Simulation of Simultaneous Estimation of Gas Temperature and Emissivity in a Furnace by Inverse Analysis in Thermal Radiation.***

*The inverse analysis in thermal radiation problems has many applications in engineering, for example, the prediction of the temperature distribution in furnaces. In direct radiation problems, it is known the radioactive transport equation, the environment features, the boundary conditions and it is important to estimate the field of intensities. By the other hand, in many practical problems, the environment features and the boundary conditions are unknown. In this work, it is used the conjugate gradient method joint with the discrete ordinated method for simultaneous estimation of gas temperature distribution and wall emissivity. The furnace media is simulated as a combustion gas between two parallel gray surfaces. The gas is considered gray, absorbing, emitting and with isotropic scattering. The inverse problem is formulated as an optimization problem which minimizes the error between the calculated intensity of radiation leaving of the media and a simulated experimental measurement of the intensity of radiation. The inverse analysis consists on the following steps: direct problem; sensibility problem; and the gradient equation. The calculation procedure of each of these steps is presented and then the algorithm for the solution of the inverse problem is presented. Numerical results to examine the accuracy of the conjugate gradient method for experimental measurements in both cases without and with noise are shown. The results show that the wall emissivities and the temperature distribution of the media can be estimated with accuracy by the used method.*

**KEY WORDS:** Radiation, inverse analysis, conjugated gradient method, temperature distribution.

## I. INTRODUÇÃO

A análise inversa de radiação térmica em meios participantes tem uma ampla faixa de aplicações na engenharia, por exemplo, sensoriamento remoto na atmosfera, determinação de propriedades radiativas do meio, predição de temperatura de chama, projeto de sistemas de combustão tais como fornos, estufas, câmaras de combustão. O tema que tem sido intensivamente revisado em McCormick, (1986, 1992); França et al. (2002); Ozisik; Orlande, (2000). Cavidades radiantes são encontradas em diferentes aplicações industriais. Na maioria dos casos, a cavidade contém aquecedores ou gases reais participantes que irradiam sobre um produto localizado dentro do meio.

Problemas diretos de troca radiativa são aqueles nos quais as propriedades radiativas do gás que preenche a cavidade, as propriedades das superfícies de contorno e as condições de contorno são todas conhecidas. Essa classe de problemas são matematicamente “bem postos”, e, portanto, podem ser resolvidos com procedimentos matemáticos bem estabelecidos e diretos. Problemas inversos de troca radiativa são, no entanto, aqueles nos quais algum ou vários dos dados mencionados acima são desconhecidos. Em seu lugar, alguma informação adicional, tal como temperaturas, medidas ou especificadas, estão disponíveis numa parte do domínio ou superfície do contorno. A utilização de técnicas inversas frequentemente conduz a problemas matematicamente “mal-postos”, porque podem existir múltiplas soluções para as condições especificadas ou almejadas sobre as superfícies de contorno ou parte do domínio, ou ainda, não produzir uma solução viável.

Problemas inversos que tratam da predição da distribuição de temperatura num meio a partir de medições radiativas experimentais ou simuladas vêm sendo estudados por vários pesquisadores (Sanchez; McCormick, 1992; Li; Ozisik, 1992,

1993; Siewert, 1994; Li, 1994; Liu; Tan; Yu, 2000). Têm-se reconstruído perfis de temperatura ou termos-fonte, por análise inversa, num meio plano-paralelo unidimensional, num meio esférico e num meio cilíndrico a partir de dados simulados de intensidades de radiação saindo nas fronteiras. A maioria dos primeiros trabalhos tem considerado sistemas unidimensionais assumindo que as superfícies de contorno são transparentes, ou a emissividade da superfície de contorno é conhecida. Em muitas ocasiões, a superfície de contorno é opaca e sua emissividade é desconhecida; por exemplo, a emissividade da parede de uma câmara de combustão muda com as condições de operação. Sob essa condição, o perfil de temperatura desconhecido precisa ser estimado simultaneamente com as desconhecidas emissividades das superfícies de contorno.

Para sistemas governados pela radiação, o problema inverso é representado por um conjunto de equações de Fredholm de primeira classe, os quais são conhecidos por "mal-postos". Portanto, para poder produzir soluções fisicamente razoáveis e, também, precisas, o sistema deve ser regularizado. A regularização permite obter um conjunto de soluções que ignoram alguma informação que é fonte do caráter mal posto do sistema. Conseqüentemente, as soluções estão sujeitas a diferentes níveis de erro, que é resultado da informação ignorada e, então, deve ser escolhida uma solução ótima que satisfaça os requerimentos físicos do problema com aceitável precisão.

O problema inverso de radiação considerado neste trabalho é concernente com a estimação simultânea da distribuição de temperaturas num forno e da emissividade das superfícies das paredes, considerando o sistema como unidimensional entre paredes planas que contém um gás participante cinzento, absorvente, emissor e com espalhamento isotrópico. A estimação é feita a partir do conhecimento de intensidades de radiação, saindo do meio em alguns pontos das superfícies das paredes os quais simulam dados de instrumentos de medição. Assume-se que as propriedades radiativas, tais como o coeficiente de absorção, de espalhamento e o albedo são uniformes em todo o meio. As fronteiras são consideradas opacas. O problema inverso é formulado como um problema de otimização e, utiliza-se para sua solução, o método do gradiente conjugado. A análise consiste do problema direto, a equação gradiente e o problema de sensibilidade. Neste trabalho, utiliza-se o método das ordenadas discretas (DOM) para resolver tanto o problema direto com o problema de sensibilidade, e são utilizadas diferentes quadraturas angulares para examinar a precisão da estimação. O procedimento de cada passo é descrito e, então, apresenta-se o algoritmo para a solução do problema inverso de radiação. São investigados vários problemas inversos de estimação de termo-fonte e da emissividade das superfícies a fim de demonstrar a precisão computacional e a eficiência do método de análise inversa apresentado neste trabalho.

## II. ANÁLISE

A seguir, apresenta-se a análise para o problema de determinação simultânea da distribuição de temperatura no meio e a emissividade das superfícies da parede. A análise consiste do problema direto, a equação gradiente e do problema de sensibilidade.

### 2.1 O PROBLEMA DIRETO

Considere o processo de transferência de calor por radiação num meio cinzento paralelo plano, absorvente, emissor, com espalhamento isotrópico. As superfícies de contorno (figura 1) em  $x = 0$  e  $x = x_1$  são opacas, difusas e cinzentas. Assume-se que a radiação emitida pelas superfícies de contorno pode ser desprezada (superfícies frias). Não há radiação externa incidente. Assume-se que as propriedades radiativas do meio, tais como o albedo  $\omega$  é a função de fase de espalhamento  $\Phi(s', s)$  são uniformes em todo o domínio. O problema direto nesta análise é encontrar as intensidades de radiação, saindo nas superfícies de contorno, tendo conhecimento da distribuição de termo fonte ou da distribuição de temperatura e das propriedades radiativas. Na figura 1, mostra-se o esquema da geometria do problema, em que  $S(\tau)$  é a distribuição do termo fonte no meio, que será aproximado pelo polinômio à esquerda.



Figura 1. Esquema da geometria do problema

A equação de transporte radiativo para um gás cinzento absorvente, emissor, isotrópico pode ser escrito como (Siegel; Howell, 1992),

$$(\Omega \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, \Omega) = -(\kappa + \sigma) I(\mathbf{r}, \Omega) + S(\mathbf{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega'; \quad \text{com} \quad S(\mathbf{r}) = \frac{(1 - \omega) \bar{n}^2 \sigma T^4(\mathbf{r})}{\pi} \quad (1)$$

em que  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  é a intensidade da radiação em  $\mathbf{r}$  e na direção  $\Omega$ ;  $I_b(\mathbf{r})$  é a intensidade da radiação de corpo negro na posição  $\mathbf{r}$  e na temperatura do meio;  $\kappa$  e  $\sigma$  são os coeficientes de absorção e de espalhamento do meio cinzento; e a integração é no sentido da direção incidente  $\Omega'$ . O termo fonte  $S(\mathbf{r})$  está relacionado à temperatura  $T(\mathbf{r})$  do meio e em que  $\bar{n}$  é o índice de refração e  $\bar{\sigma}$  é a constante de Stefan Boltzmann. Para superfícies difusamente refletivas a condição de fronteira radiativa para a equação (1) é

$$I(\mathbf{r}, \Omega) = \varepsilon I_b(\mathbf{r}) + \frac{\rho}{\pi} \int_{n \cdot \Omega' < 0} |n \cdot \Omega'| I(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \quad (2)$$

em que  $\mathbf{r}$  pertence à superfície de contorno, e a equação (2) se aplica para  $n \cdot \Omega > 0$ .  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  é a intensidade de radiação saindo da superfície de contorno,  $\varepsilon$  é a emissividade da superfície,  $\rho$  é a refletividade da superfície e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície de contorno.

No sistema cartesiano, a equação de transporte radiativo unidimensional em ordenadas discretas, na direção  $m$  para um meio emissivo, absorvente e com espalhamento isotrópico é

$$\mu_m \frac{dI_m}{dx} = -\beta_0 I_m + S(x) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I_m d\mu' \quad (3)$$

em que  $\mu_m$ , é o cosseno direcional de  $\Omega_m$  e  $\beta_0 = \kappa + \sigma$ . A condição de contorno pode ser escrita como

$$I(0, \mu) = 2(1 - \varepsilon_0) \int_{-1}^0 I(0, \mu') \mu' d\mu'; \quad \mu > 0 \quad (4.a)$$

$$I(x_L, \mu) = 2(1 - \varepsilon_L) \int_0^1 I(x_L, \mu') \mu' d\mu'; \quad \mu < 0 \quad (4.b)$$

em que,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , e  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_L$  são as emissividades das superfícies de contorno em  $x = S_0 = 0$  e  $x = S_L = x_L$ .

A discretização espacial em volumes finitos pode ser obtida multiplicando-se a equação (3) por  $dx$  e integrando no volume de controle ( $i$ )

$$\mu_m dx (I_{i+\frac{1}{2}}^m - I_{i-\frac{1}{2}}^m) = V_i (S(x) - \beta I^m)_i \quad (5)$$

em que  $V_i$  é o volume de controle  $i$  em  $m^3$ . Assumindo que as condições de contorno estão dadas, o sistema de equações é fechado e define-se um sistema de interpolação que relaciona as intensidades nas faces aos valores nodais. Discretizando a equação de transporte radiativo, podemos reescrever a equação (5) como,

$$(I_i^m)^{n+1} = \frac{V_i (S(x))^n + |\mu_m| dx (I_{i-\frac{1}{2}}^m)^{n+1} + S_{df}^n}{|\mu_m| dx + \beta V_i}, \text{ com } S_{df}^n = |\mu_m| dx (I_i^m - I_{i+\frac{1}{2}}^m)^n \quad (6)$$

## 2.2 O PROBLEMA INVERSO

No problema inverso, a distribuição do termo-fonte é considerada como conhecida, mas outras variáveis nas equações (3), (4.a) e (4.b) são desconhecidas. Em adição, são consideradas disponíveis as intensidades de radiação medidas, saindo nas fronteiras. Na análise inversa, a distribuição do termo-fonte é estimada a partir de dados de medições das intensidades de radiação saindo nas fronteiras. O termo-fonte pode ser representado por

$$S(x) = \sum_{n=0}^N a_n (\beta_0 x)^n \quad \text{ou} \quad S(\tau) = \sum_{n=0}^N a_n (\tau)^n \quad (7)$$

em que  $\tau = \beta_0 x$  é a variável espessura ótica e  $N$  é a ordem de expansão do polinômio do termo-fonte.

O problema inverso de radiação pode ser formulado como um problema de otimização. Espera-se minimizar a função objetivo (Li; Ozisik, 1993),

$$J(\tilde{\mathbf{a}}) = \sum_{\mu_i < 0} w_i [I(0, \mu_i, \tilde{\mathbf{a}}) - Y(\mu_i)]^2 + \sum_{\mu_i > 0} w_i [I(x_L, \mu_i, \tilde{\mathbf{a}}) - Z(\mu_i)]^2 \quad (8)$$

em que  $Y(\mu)$  e  $Z(\mu)$  são as intensidades de radiação saindo, medidas nas fronteiras  $x = 0$  e  $x = x_L$ , respectivamente;  $I(0, \mu_i, \tilde{\mathbf{a}})$  e  $I(x_L, \mu_i, \tilde{\mathbf{a}})$  são as intensidades de radiação estimadas em  $x = 0$  e  $x = x_L$ , respectivamente, para o vetor

estimado  $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N; \tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_1)$ . O problema é encontrar o vetor  $\tilde{\mathbf{a}}$  que minimize a função  $J$ . As condições de contorno para o problema de sensibilidade são obtidas da derivação das Eqs. (4.a) e (4.b) respeito dos coeficientes do vetor  $\mathbf{a}$ . A presença de  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_1$  no vetor  $\mathbf{a}$  torna o problema inverso não linear.

O algoritmo computacional desse procedimento de minimização consiste de dois módulos principais: os módulos de cálculo de radiação direta e de busca. Uma explicação prévia reside em que para o primeiro módulo é empregado o Método de Ordenadas Discretas (DOM) e para o segundo módulo é utilizado o Método do Gradiente Conjugado (CGM) como o método básico de busca para minimizar a função  $J$ .

### 2.3 O MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO DE MINIMIZAÇÃO

A minimização da função objetivo concernente ao vetor desejado é o mais importante procedimento para resolver o problema inverso. O Método do Gradiente Conjugado é utilizado neste trabalho para determinar a desconhecida distribuição de temperaturas num meio. As iterações são construídas na seguinte forma (Li; Ozisik, 1992; Liu; Tan; Yu, 1999):

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k - \alpha^k \mathbf{d}^k \quad (9)$$

em que  $\alpha^k$  é o tamanho do passo,  $\mathbf{d}^k$  é o vetor direção de descida dado por

$$\mathbf{d}^k = \nabla J(\mathbf{a}^k) + \beta^k \mathbf{d}^{k-1} \quad (10)$$

e o coeficiente conjugado  $\beta^k$  é determinado de

$$\beta^k = \frac{\nabla J(\mathbf{a}^k) \nabla J^T(\mathbf{a}^k)}{\nabla J(\mathbf{a}^{k-1}) \nabla J^T(\mathbf{a}^{k-1})} \quad \beta^0 = 0 \quad (11)$$

em que o vetor de fileira  $\nabla J$  definido por

$$\nabla J = \left( \frac{\partial J}{\partial a_0}, \frac{\partial J}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_N} \right) \quad (12)$$

é o gradiente da função objetivo. Seus componentes são definidas como

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 2 \sum_{\mu_i < 0} w_i [I(0, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}) - Y(\mu_i)] \frac{\partial I(0, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}})}{\partial a_n} + 2 \sum_{\mu_i > 0} w_i [I(x_L, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}) - Z(\mu_i)] \frac{\partial I(x_L, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}})}{\partial a_n} \quad (13)$$

A princípio, o tamanho do passo  $\alpha^k$  da iteração  $k$  th pode ser determinado minimizando a função  $J(\mathbf{a}^k - \alpha^k \mathbf{d}^k)$ , para um dado  $\mathbf{a}^k$  e  $\mathbf{d}^k$  na seguinte forma:

$$\frac{\partial J(\mathbf{a}^k - \alpha^k \mathbf{d}^k)}{\partial \alpha^k} = 0 \quad (14)$$

Como  $J(\mathbf{a}^k - \alpha^k \mathbf{d}^k)$  é uma função implícita de  $\alpha^k$ , o passo exato é difícil de resolver. Como uma aproximação de primeira ordem, faz-se uma expansão de Taylor de primeira ordem da função com respeito à  $\alpha^k$ . Usando a Eq. (14), tem-se

$$\alpha^k = \left\{ \sum_{\mu_i < 0} w_i [I(0, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) - Y(\mu_i)] [\nabla I(0, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) \mathbf{d}^k] + \sum_{\mu_i > 0} w_i [I(x_L, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) - Z(\mu_i)] [\nabla I(x_L, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) \mathbf{d}^k] \right\} / \left\{ \sum_{\mu_i < 0} w_i [\nabla I(0, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) \mathbf{d}^k]^2 + \sum_{\mu_i > 0} w_i [\nabla I(x_L, \mu_i; \tilde{\mathbf{a}}^k) \mathbf{d}^k]^2 \right\} \quad (15)$$

em que o vetor

$$\nabla I = \left( \frac{\partial I}{\partial a_0}, \frac{\partial I}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial a_N} \right) \quad (16)$$

é o vetor de coeficientes de sensibilidade, que é essencial no procedimento de solução de problemas inversos.

### 2.4 PROBLEMA DE SENSIBILIDADE

Para obter os coeficientes de sensibilidade, substitui-se a Eq. (7) na Eq. (3) e diferencia-se em relação a cada termo do vetor  $\mathbf{a}$ , o problema direto definido pelas Eqs. (3), (4.a) e (4.b). As equações do problema de sensibilidade não são apresentadas aqui por brevidade, ver [6, 12]. Um procedimento numérico similar ao do problema direto é utilizado na solução do problema de sensibilidade e não será repetido aqui por questão de brevidade. Devido o vetor de coeficientes de sensibilidade  $\nabla J$  ser um vetor dependente do vetor  $\mathbf{a}$ , a estimação do termo-fonte é não linear, e será necessário resolver cada uma vez desde o início.

## 2.5 CRITÉRIO DE PARADA

O critério de parada é selecionado da seguinte maneira:

$$J(\mathbf{a}^k) < \delta \quad \text{ou} \quad \left| \frac{2\sigma_o^2}{J(\mathbf{a}^k)} - 1 \right| < \delta_1^* \quad (17)$$

se o problema não tem erros nas medições, a condição  $\delta$  é utilizada para terminar o processo iterativo caso contrario  $\delta_1$  é utilizada. Em que  $\delta$  e  $\delta_1$  são números pequenos positivos especificados e  $\sigma_o$  é o desvio padrão.

## 2.6 RUÍDO NAS MEDIÇÕES EXPERIMENTAIS SIMULADAS

Para simular as medições de intensidade de radiação, saindo nas superfícies de contorno,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Z}$  contendo erros de medição, são adicionados às intensidades de radiação exatas calculadas da solução do problema direto, erros randômicos de desvio padrão  $\sigma_o$ . Assim, tem-se

$$\mathbf{Y}_{medidas} = \mathbf{Y}_{exata} + \sigma_o \zeta; \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}_{medidas} = \mathbf{Z}_{exata} + \sigma_o \zeta \quad (18)$$

em que  $\zeta$  é a distribuição normal da variável *random* com média zero e desvio padrão unitário. Há uma probabilidade de 99% de  $\zeta$  cair na faixa  $-2.567 < \zeta < 2.567$  [6].

## 2.7 ALGORITMO COMPUTACIONAL

O algoritmo computacional para a solução do problema inverso de radiação pode ser resumido como segue:

- Passo 1. Estipular um valor inicial de  $\mathbf{a}$  e  $\gamma$  (fator de regularização). Fazer  $k = 0$ .
- Passo 2. Resolver o problema direto e calcular as intensidades de radiação saindo  $\mathbf{I}(0, \mu_n; \mathbf{a})$  e  $\mathbf{I}(x_i, \mu_n; \mathbf{a})$ .
- Passo 3. Calcular a função objetivo  $J(\mathbf{a})$ . Terminar o processo de iteração se o critério de parada especificado é satisfeito. Caso contrário, ir ao passo 4.
- Passo 4. Resolver o problema de sensibilidade e calcular o vetor de coeficientes de sensibilidade  $\nabla J$ .
- Passo 5. Calcular o gradiente da função objetivo  $\nabla J(\mathbf{a})$ .
- Passo 6. Conhecendo  $\nabla J(\mathbf{a})$ , calcular o coeficiente conjugado  $\beta$  da Eq. (11); então, calcular o vetor direção de descida  $\mathbf{d}^k$  da Eq. (10).
- Passo 7. Conhecendo  $\nabla J$ ,  $\mathbf{I}(0, \mu_n)$  e  $\mathbf{I}(x_i, \mu_n)$ , calcular o tamanho do passo  $\alpha^k$  da Eq. (15).
- Passo 8. Calcular o novo vetor estimado  $\mathbf{a}^{k+1}$  da Eq. (9).
- Passo 9. Determinar o parâmetro de regularização  $\gamma^{k+1}$ .
- Passo 10. Fazer  $k = k + 1$ , e ir ao passo 2.

Para iniciar a iteração, é utilizado o dado inicial  $\mathbf{a}^0 = \mathbf{0}$  para generalizar o procedimento. Foi utilizado  $\gamma^0 = 10^3$ .

## III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base na análise teórica e numérica descrita acima, foi desenvolvido um código computacional para resolver esse problema inverso. A espessura ótica do meio é considerada 1.0 e o coeficiente de albedo  $\omega = 0,3$ . Para examinar a precisão de método apresentado neste trabalho, são considerados dois diferentes casos. No primeiro, é feita a estimação, assumindo que os dados medidos das intensidades de radiação não contêm erros. No segundo, são analisados os efeitos de medições com erros randômicos. Para todos os resultados apresentados neste trabalho, assume-se que as intensidades de radiação saindo nas fronteiras são disponíveis nos pontos respectivos da quadratura para diferentes quadraturas angulares do DOM utilizadas. Os resultados das estimações das emissividades são apresentados em termos das refletividades, fazendo  $\rho = 1 - \varepsilon$ . Para simular as condições de temperatura num forno, considera-se um termo-fonte expressado como um polinômio de grau 4 como em [12]:

$$S(\tau) = S(\beta, x) = 0,2 + 20\tau + 44\tau^2 - 128\tau^3 + 64\tau^4, \quad \text{W/cm}^2 \quad (19)$$

Os valores estimados do termo-fonte e da refletividade das superfícies de contorno em  $x = 0$  e  $x = x_i$ , são mostrados na figura 2. Observa-se que a estimação da distribuição do termo-fonte é precisa quando comparada com os valores exatos. O gráfico da variação da função objetivo, figura 3, mostra também uma suave variação, com uma rápida queda para um mínimo no princípio; e, uma queda lenta depois, mas contínua em todo momento. Foram feitos ainda neste caso repetidos experimentos numéricos para verificar a repetição das estimações, obtendo resultados satisfatórios. Foram testadas também

diferentes quadraturas angulares no método das ordenadas discretas e se observou que elas têm influência nos resultados das estimações, em que a menor ordem da quadratura angular  $S_n$  apresenta os resultados menos precisos. Para todos os resultados mostrados aqui, utilizou-se a quadratura angular  $Tn_6$ , e interpolação espacial CLAM, no método das ordenadas discretas para resolver os problemas diretos e de sensibilidade. Foram feitas também simulações numéricas para estimação do termo-fonte e das emissividades para diferentes valores exatos, em todos os casos testados encontram-se estimções com o mesmo grau de aproximação do caso mostrado na figura 2. Esses resultados não são mostrados aqui por questão de brevidade.

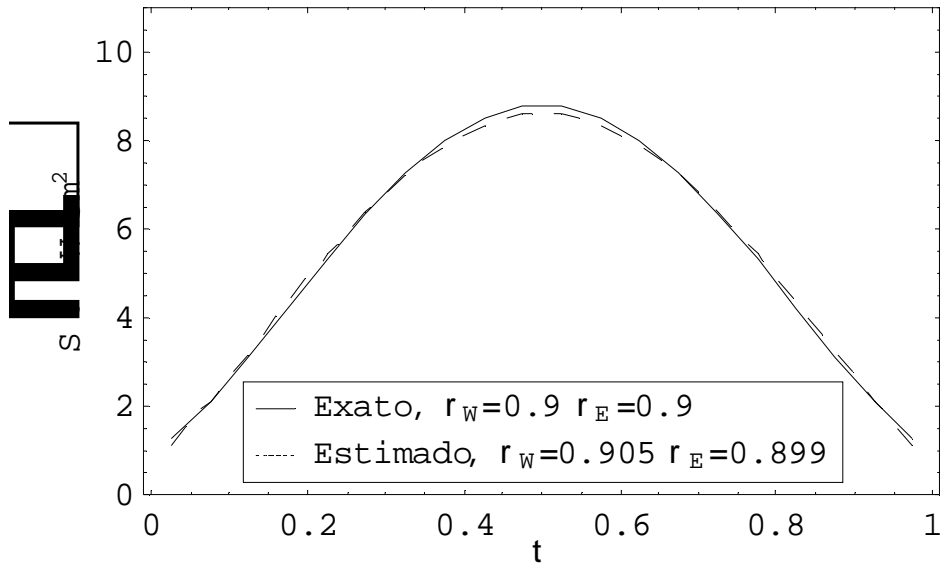


Figura 2 Estimação simultânea do termo-fonte do meio e as emissividades das superfícies de contorno, para  $\sigma_s = 0$ .

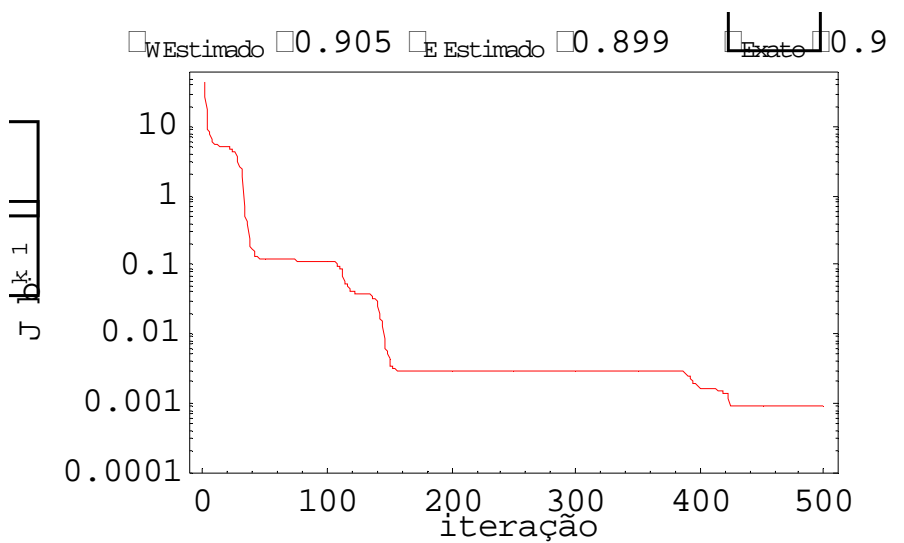
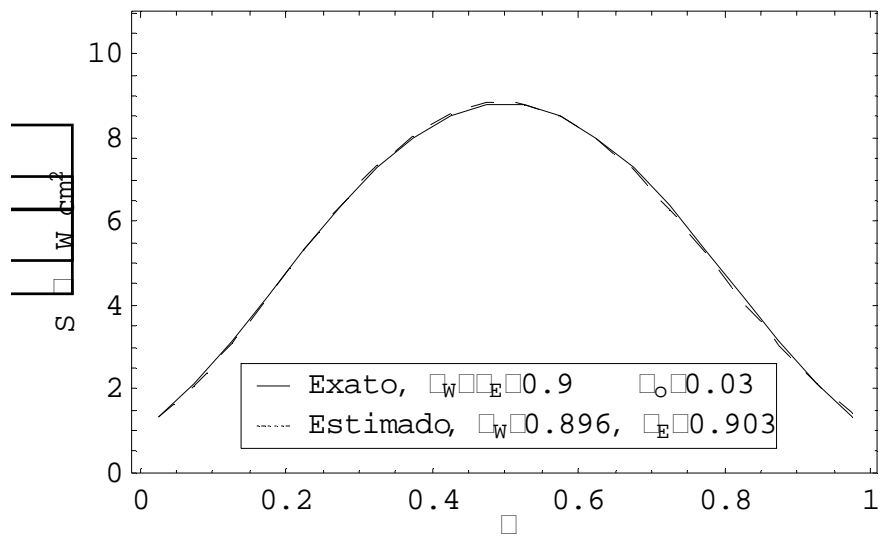


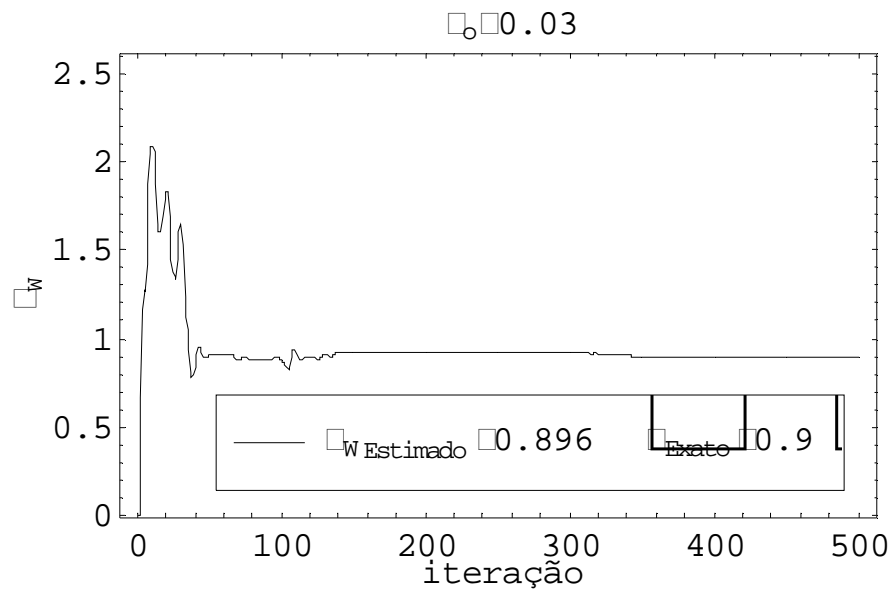
Figura 3 - Variação da função objetivo para  $\sigma_s = 0$ .

Para examinar o efeito de erros nos dados de entrada, na estimação simultânea da temperatura do meio e as emissividades da superfície de contorno, assume-se que os dados experimentais simulados contêm erros randômicos de medição de desvio padrão  $\sigma_s = 0,03$  e  $\sigma_s = 0,06$ . Utilizam-se nos cálculos, diferentes conjuntos de erros randômicos para cada fronteira. A figura 4 mostra os resultados da estimação do termo-fonte do meio e as refletividades das superfícies de contorno para uma amostra com erros randômicos com  $\sigma_s = 0,03$ . Observa-se, neste caso, que os resultados da estimação têm a mesma precisão que a estimação na ausência da perturbação. Também se notou que com o aumento de  $\sigma_s$  de 0,03 para 0,06, a precisão da estimação decresce muito pouco para uma mesma quantidade de iterações. As condições de contorno assumidas não afetam o perfil do termo-fonte. As emissividades  $e$ , por conseqüência, as refletividades estimadas convergem sempre para valores em torno do valor exato com uma diferença na faixa de menos de 1%, resultado que pode ser considerado bastante bom. A figura 5 mostra a variação dos valores estimados da refletividade com o número de iterações da simulação numérica. Nota-se que depois de uma forte oscilação inicial, a oscilação diminui e converge para o

valor estimado com relativa suavidade. Essa oscilação parece que está relacionada, principalmente, à natureza não linear deste problema inverso e, em menor grau, à perturbação nos dados de entrada. Os tempos de CPU requerido nessas simulações são similares ao caso anterior.



**Figura 4** - Estimação simultânea do termo fonte do meio e as emissividades das paredes, para  $\sigma = 0,03$ .



**Figura 5** - Estimação simultânea do termo-fonte do meio e as emissividades das paredes, para  $\sigma = 0,03$ .

#### IV. CONCLUSÕES

Apresenta-se um método inverso para a estimação simultânea da distribuição de temperatura num forno aproximado como sendo um meio unidimensional, cinzento, absorvente, emissivo e com espalhamento isotrópico e da emissividade das superfícies de contorno. Assume-se que são conhecidas as intensidades de radiação saindo nas paredes. O problema inverso é resolvido utilizando-se o método do gradiente conjugado. Dados de entrada com ruído foram utilizados para testar a precisão e estabilidade do método. Os resultados mostram que o perfil de temperatura pode ser estimado com precisão mesmo com dados com ruído quando é utilizada uma quadratura angular de ordem maior, como o Tn6, na solução do problema direto com o método das ordenadas discretas. No entanto, a estimação mostra-se muito sensível ao aumento dos erros nas medições quando é utilizada uma quadratura angular de ordem menor como a S. Os resultados do método inverso são sensíveis à precisão da solução do problema direto e do problema de sensibilidade. Os métodos propostos também conseguem estimar com um alto grau de precisão a emissividade das superfícies de contorno.

#### AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer à FAPESP pelo apoio financeiro, processo 03/12456-7.

#### REFERÊNCIAS

- FRANÇA, F.R., HOWELL, J.R., EZEKOYE, O.A., MORALES, J.C. Inverse design of thermal systems, in: J.P. Hartneu, T.F. Irvine (Eds.), *Advances in Heat Transfer*, vol. 36, p 1-110, Elseiver, 2002.
- LI, H.Y., OZISIK, M.N. Identification of temperature profile in an absorbing, emitting and isotropically scattering medium by inverse analysis. *J. Heat Transfer*, vol. 114, p. 1060-1063, 1992.
- LI, H.Y., OZISIK, M.N. Inverse radiation problem for simultaneous estimation of temperature profile and surface reflectivity. *J. Thermophys. Heat Transfer*, vol. 7, p. 88-93, 1993.
- LI, H.Y. Estimation of the temperature profile in a cylindrical medium by inverse analysis. *J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer*, vol. 52, p. 755-764, 1994.
- LIU, L.H., TAN, H.P., YU, Q.Z. Simultaneous identification of temperature profile and wall emissivities in semitransparent medium by inverse radiation analysis. *Numerical Heat Transfer Part A*, vol. 36, p. 511-525, 1999.
- LIU, L.H., TAN, H.P., YU, Q.Z. Inverse radiation problem in one-dimensional semitransparent plane-parallel media with opaque and specularly reflecting boundaries. *J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer*, vol. 64, p. 395-407, 2000.
- MCCORMICK, N.J. Methods for solving inverse problems for radiation transport – an update. *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 15, p. 759-772, 1986.
- MCCORMICK, N.J. Inverse radiative transfer problems: A review. *Nuclear science and Engineering*, vol. 112, p. 185-198, 1992.
- OZISIK, M.N., ORLANDE, H.R.B. *Inverse Heat Transfer*, Taylor and Francis, New York, 2000.
- SIEGEL, R., HOWELL, J. R. *Thermal Radiation Heat Transfer*. 3ª ed., Washington. USA, 1992.
- SIEWERT, C.E. A radiative transfer inverse-source problem for a sphere. *J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer*, vol. 52, p. 157-160, 1994.
- YI, H.C., SANCHEZ, R., MCCORMICK, N.J. Bioluminescence estimation from ocean in situ irradiances. *Applied Optics*, vol. 31, p. 822-830, 1992.