

ANÁLISE PARA ESCOLHA DE UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO A PARTIR DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DA CONVECÇÃO NATURAL INTERNA EM CAVIDADES

Maurício de Araújo Zanardi
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Guara^{at} – FEG
Departamento de Energia – DEN
Newton Galvão de Campos Leite
Departamento de Mecânica e Energia – DME
Faculdade de Tecnologia – FAT
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Resumo: Neste trabalho foi analisada a influência da função de interpolação nos resultados da convecção natural interna em cavidades. A escolha do problema de convecção natural para servir como um problema teste foi motivado porque ele foi intensivamente estudado por muitos autores e resultados padrões encontram-se disponíveis. A fim de conseguir o objetivo proposto, um programa FORTRAN foi desenvolvido considerando uma cavidade tridimensional diferencialmente aquecida. A técnica de volumes finitos foi empregada para fazer a discretização das equações de conservação de massa, momento e energia e o procedimento SIMPLE foi usado para fornecer a equação de pressão. O sistema de equações lineares obtidos depois da discretização foi solucionado usando o algoritmo CGSTAB. Os resultados foram obtidos para números de Rayleigh até 10^5 e diferentes funções de interpolação. As distribuições de velocidade e temperatura foram comparadas com resultados padrões e as variações foram comentadas. Além disso, a evolução dos resíduos para todas as equações e o número de iterações para alcançar o critério de convergência foi monitorado mostrando que para algumas situações, onde os termos advectivos foram dominantes, a convergência pode tornar-se difícil de alcançar.

Palavras-Chave: Funções de interpolação. Convecção natural. Cavidade diferencialmente aquecida

ANALYSIS OF THE INTERPOLATION FUNCTION CHOICE ON THE NUMERICAL RESULTS FOR THE NATURAL CONVECTION INSIDE ENCLOSURES

Abstract: In this work it is analyzed the influence of the interpolation function on the results for the natural convection inside enclosures. The choice of the natural convection problem to serve as a test problem was motivated because it has been intensively studied for many authors and benchmark results are available. In order to achieve the proposed objective, a FORTRAN program was developed considering a 3-D differentially heated enclosure. The finite volume technique was employed to perform the mass, momentum and energy conservation equations discretization and the SIMPLE procedure was used to provide the pressure equation. The linear equation systems obtained after the discretization were solved using a CGSTAB algorithm. The results were obtained using Rayleigh numbers up to 10^5 and different interpolation functions. The velocity and temperature distributions were compared with well accepted results and the variations were commented. Also, the evolution of the residues for all equations and the number of iterations to get the convergence criterion was monitored showing that for some situations, where the advective terms were predominant, the convergence may become hard to reach.

Keywords: Interpolation function. Natural convection. Enclosure heated from the side.

Introdução

Com o aumento da capacidade de armazenamento de dados dos computadores aliado a sua popularidade, as soluções de problemas práticos de Engenharia tornaram-se uma realidade presente nos dias de hoje. Dentro da classe de problemas da Engenharia que envolvem soluções aproximadas para situações multidimensionais complexas envolvendo escoamento de fluido, transferência de calor e de massa o Método de Diferenças Finitas é um dos mais procurados segundo Raithby (1). O autor foi um dos pioneiros no desenvolvimento de funções de interpolação bidimensionais. Quando os termos convectivos nas equações de conservação são aproximados usando uma função de interpolação do tipo *Upstream Difference Scheme* (UDS) conhecida também segundo Patankar (2) por *Upwind Difference Scheme* ou ainda *Donnor Cell Method*, um grande erro pode resultar nas regiões do escoamento onde as direções da linha da grade e do vetor velocidade não são muito alinhadas. Dois esquemas opcionais foram propostos com o intuito de reduzir esse erro mantendo as vantagens do esquema UDS. Esses esquemas são particularmente exatos em problemas onde a difusão e a convecção fazem o papel dominante no estabelecimento da distribuição da variável dependente. Soluções para dois casos ilustram substancialmente o progresso na exatidão dos resultados dos novos esquemas conhecidos como *Skew Upstream Differencing Scheme* (SUDS) e *Skew Upstream Weighted Differencing Scheme* (SUWDS).

Ainda dentro do assunto sobre aproximações dos termos convectivos nas equações de conservação, Raithby (3) comenta em seu trabalho que funções de interpolação do tipo UDS são às vezes usadas, contudo, contestações baseadas no aparecimento de uma falsa difusão numérica são muitas vezes levantadas. O trabalho de Raithby (3) mostrou que a falsa difusão normalmente associada com o esquema UDS é um fraco indicador do erro total quando aproxima os termos convectivos, e uma nova definição para falsa difusão foi proposta. As condições limitantes sob as quais o esquema UDS é válido são então determinadas; vários experimentos numéricos foram realizados para determinar o quanto os resultados podem sair das condições ideais antes da aproximação feita pelo esquema UDS conduzir para erros inaceitáveis. Foi concluído que a aproximação causada pelo esquema UDS é válida somente sob condições restritas, mas essas condições incluem muitos problemas de interesse prático.

Wrong *et al.* (4) dirigiram um trabalho que utilizava métodos de diferenças finitas para resolver o problema padrão de convecção natural em uma cavidade quadrada, onde uma malha muito fina foi exigida para obter resultados dentro de uma faixa de 1 a 2% de precisão. As derivações das equações de diferenças finitas exigem a introdução de muitas aproximações; esse estudo avaliou sistematicamente essas aproximações para encontrar quais são as responsáveis pela necessidade de uma grade fina. As fracas aproximações foram então melhoradas uma a uma, resultando em um esquema que forneceu resultados altamente exatos usando uma grade relativamente grossa. O método de avaliação da precisão das aproximações, as próprias aproximações melhoradas, e o método de solução usado contém características novas. Necessidades de armazenamento e tempo de computação para um procedimento de solução (*solver*) da nova matriz esparsa, a qual foi usada no corrente estudo para simultâneas soluções da função corrente e função vorticidade foi também apresentada.

Prakash (5) aplicou o esquema *LOcally Analytic Differencing* (LOAD) na solução de uma variedade de problemas de convecção – difusão uni e bidimensionais. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos com o esquema *Exponential Differencing* (ED) de Spalding (6). O esquema LOAD é significativamente mais preciso: para grades com número de Peclet maior que 5 os erros obtidos na solução com o esquema LOAD podem ser de uma a duas ordens de magnitude menores que os erros obtidos com o esquema ED para uma mesma grade. Para uma precisão prescrita, o esquema LOAD exige muito poucos pontos na grade (memória computacional) e muito menos tempo computacional (custo). Para problemas bidimensionais, a falsa difusão encontrada no esquema LOAD foi muito menor que no esquema ED. O esquema LOAD é fácil de implementar: os coeficientes de discretização permanecem os mesmos que no esquema ED e somente o termo fonte recebe algumas correções adicionais. Essa correção no termo fonte foi apresentada, mostrando que programas de computador desenvolvidos segundo o esquema ED podem facilmente serem modificados para incorporar o esquema LOAD.

Souza *et al.* (7) desenvolveram o esquema conhecido como *Weighted Upstream Differencing Scheme – Extended* (WUDS - E) que resolve a mesma equação diferencial do esquema SUWDS proposta por Raithby *et al.* (8), incluindo todos os efeitos restantes no termo fonte. O esquema foi desenvolvido para coordenadas generalizadas e a função de interpolação leva em conta todos os pontos vizinhos, como se fosse um esquema *skew*. Os testes realizados no problema da advecção de um pulso mostraram que o método tem o mesmo desempenho dos métodos *skew*, que são naturalmente mais complexos e aumentam a banda da matriz.

O presente trabalho deseja avaliar de uma maneira objetiva à influência do uso de diversas funções de interpolação nos resultados de um programa computacional criado para resolver os problemas termohidrodinâmicos de uma cavidade diferencialmente aquecida. O programa foi submetido a cinco diferentes funções de interpolação. Uma malha grossa foi utilizada (10x10x10) na tentativa de facilitar o surgimento de possíveis problemas, sendo que três valores do número de Rayleigh (10^3 , 10^4 e 10^5) foram utilizados. As principais variáveis de resposta tiveram seus valores comparados bem como a relação entre o resíduo e o número de iterações para as diversas funções de interpolações usadas.

Formulação do problema

Geometria

A configuração escolhida para estudo foi uma cavidade fechada com dimensões adimensionais $1 \times 2 \times 1$, com a força da gravidade agindo na direção contrária ao eixo z. A cavidade é diferencialmente aquecida nos planos perpendiculares ao eixo x, sendo que as faces restantes são consideradas isoladas. Este tipo de problema apresenta uma infinidade de estudos já publicados o que motivou sua escolha para o desenvolvimento deste trabalho, pois acabou facilitando a validação dos resultados.

Equações regentes e condições de contorno

A modelagem matemática foi escrita usando as equações na forma tridimensional da conservação de massa, quantidade de movimento e energia em coordenadas cartesianas. As seguintes hipóteses foram aplicadas na simplificação das equações de conservação: regime laminar e permanente; fluido newtoniano; dissipação viscosa desprezível e propriedades termo físicas constantes, exceto o termo da densidade na força de corpo da equação da quantidade de movimento na direção z, que assumirá uma dependência linear da temperatura (aproximação de Boussinesq). Dessa forma, as equações de conservação foram adimensionalizadas obedecendo à definição das seguintes variáveis:

$$x = \frac{X}{L}; \quad y = \frac{Y}{L}; \quad z = \frac{Z}{L}; \quad (1)$$

$$u = \frac{UL}{\alpha_f}; \quad v = \frac{VL}{\alpha_f}; \quad w = \frac{WL}{\alpha_f}; \quad (2)$$

$$p = \frac{P}{\rho(\alpha_f/L)^2}; \quad (3)$$

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}; \quad (4)$$

$$Ra = \frac{g\beta L^3 (T_H - T_C)}{\nu\alpha}. \quad (5)$$

Massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Quantidade de movimento (Navier-Stokes)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \text{Ra Pr } \theta \quad (7)$$

Energia

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (8)$$

A nomenclatura utilizada tem o seguinte significado: g aceleração da gravidade (m/s^2); k condutividade térmica do fluido (W/m K); L altura da cavidade (m); p pressão (adimensional); Pr número de Prandtl (adimensional); Ra número de Rayleigh modificado (adimensional); T temperatura (K); T_c temperatura da parede fria (K); T_h temperatura da parede quente (K); U, V, W componentes de velocidade (m/s); u, v, w componentes de velocidade (adimensionais); X, Y, Z coordenadas cartesianas (m); x, y, z coordenadas cartesianas (adimensionais); α_f difusividade térmica do fluido (m^2/s); β coeficiente de expansão térmica ($1/\text{K}$); θ temperatura (adimensional); ν viscosidade cinemática (m^2/s) e ρ massa específica (kg/m^3).

As condições de contorno usadas para as componentes de velocidade são de impermeabilidade e não deslizamento nas paredes, ou seja, em $x = y = z = 0$ e $x = 1, y = 2$ e $z = 1$ a seguinte condição é válida $u = v = w = 0$. Já para a temperatura as seguintes condições foram admitidas: em $x = 0, \theta = 1$; em $x = 1, \theta = 0$; em $y = 0$ e $y = 2, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$; em $z = 0$ e $z = 1, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$.

Método numérico

As equações de conservação foram discretizadas usando o Método de Volumes Finitos (MVF) descrito por Patankar (2), onde o domínio de interesse foi dividido em um número finito de volumes de controle para os quais foram verificadas as condições de conservação. Conseqüentemente cada volume de controle ao redor de um ponto da malha gerou um conjunto de equações algébricas em função do número de variáveis em estudo, que no total formaram um grande sistema de equações que foi solucionado pelo método CGSTAB (*Conjugate Gradient Squared Stabilized Method*) descrito por Van den Vorst *et al.* (9). Esse método é adequado para resolver problemas de convecção – difusão com matrizes de coeficientes com sete diagonais assimétricas. Em problemas desta natureza surge a necessidade de resolver o acoplamento entre pressão – velocidade. Neste trabalho o algoritmo utilizado foi o SIMPLE (*Semi-IMPlicit Linked Equations*) no qual a pressão foi escrita como a soma da melhor estimativa disponível, mais uma correção que é calculada de maneira a satisfazer a equação da continuidade. O resíduo que contabiliza uma média aritmética (em função do número de pontos da malha) dos maiores valores vindos das equações algébricas que representam as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia em cada iteração foi usado como critério de parada do programa computacional. Assim, o programa foi considerado como convergido quando o resíduo encontrado era menor ou igual a 10^{-5} . O teste da influência do número de pontos da malha não foi realizado porque durante o procedimento de validação foi usada uma malha $30 \times 10 \times 30$ para o caso bidimensional, e os resultados encontrados foram bons quando comparados com os resultados de Mallinson *et al.* (10) que usou uma malha 51×51 . Note que o programa tridimensional foi levado a obter dados bidimensionais para comparação fazendo o tamanho do eixo y tender a infinito. Já a comparação com os dados tridimensionais foi feita com uma malha $30 \times 30 \times 30$ que representa oito vezes mais pontos quando comparado com os resultados obtidos no trabalho de Mallinson *et al.* (10).

Procedimento de validação 2-D

No processo de validação bidimensional o programa computacional simulou uma cavidade com $Ra = 1.5 \times 10^5$, $Pr = 100$ e dimensões $1 \times 10 \times 1$ (valores adimensionais). Assim, o programa computacional teve a influência da direção y praticamente anulada devido ao seu tamanho comparado com os demais eixos. Os resultados são mostrados na Fig. 1 e Fig. 2, onde a boa concordância visual pode ser verificada quando comparado com as figuras 2(a) e 2(b) obtidos por Mallinson *et al.* (10) em seu trabalho.

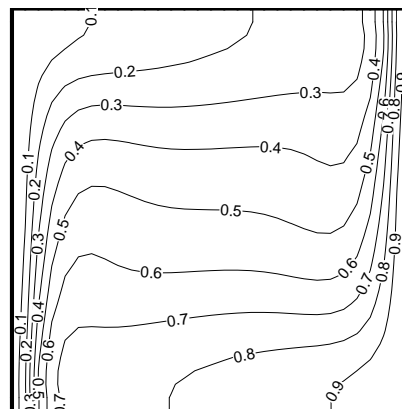
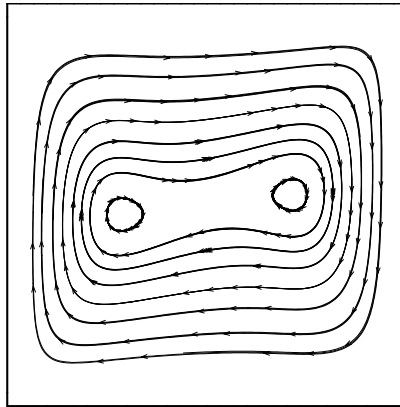


Fig. 1 – Linhas isotérmicas no plano xz para $Ra = 1.5 \times 10^5$ e $Pr = 100$.

Fig. 2 – Linhas de corrente no plano xz para $Ra = 1.5 \times 10^5$ e $Pr = 100$.

Procedimento de validação 3-D

Para a validação tridimensional uma bateria de testes foi realizada para um número de Rayleigh da ordem de 10^5 . A Tab. 1 mostra os vários valores para o número de Prandtl usados e a respectiva comparação entre a componente de velocidade máxima na direção y , representada por V_{max} . O desvio absoluto foi calculado considerando os resultados encontrados por Mallinson *et al.* (10) como referência. Deve ser levado em consideração que a diferença de números de pontos entre os trabalhos pode ter sido o principal fator nos desvios encontrados. A malha utilizada por Mallinson *et al.* (10) era grosseira devido às próprias limitações computacionais da época. Uma função de interpolação do tipo *Power Law* foi adotada tanto no teste bi quanto nos testes tridimensionais realizados.

Tabela 1. Comparação dos valores máximos da componente de velocidade na direção y

Pr	V_{max} Mallinson <i>et al.</i> (1977)	V_{max} Presente trabalho (2007)	Desvio (%)
0.1	4.065	3.115	23.4
0.2	3.950	3.040	23.0
0.7	2.286	2.269	0.74
1.0	1.870	2.094	10.7
100.0	0.436	1.345	67.6

Uma comparação visual pode também ser feita entre a Fig. 3 deste trabalho com a figura 5(b) do trabalho de Mallinson *et al.* (10). A espiral encontrada refere-se ao pior caso mostrado na Tab. 1, mesmo assim qualitativamente os resultados são bons. Isso reforça a opinião de que os desvios encontrados estão fortemente ligados aos diferentes números de pontos usados. Para evitar possíveis controvérsias foi decidido prosseguir os trabalhos com o caso onde foi encontrado o menor desvio, ou seja, $Pr = 0.7$ que equivale ao ar como fluido de trabalho.

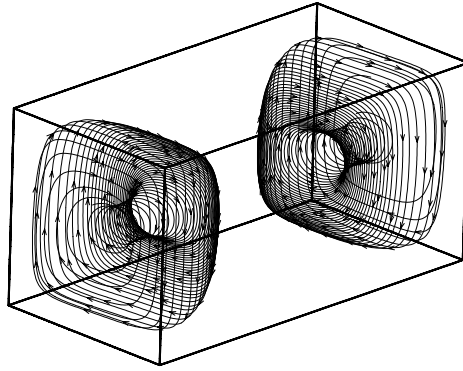


Fig. 3 – Linhas de corrente nos pontos (0.4, 0.1, 0.4) e (0.4, 0.9, 0.4) para $Ra = 10^5$ e $Pr = 100$.

Resultados

Este trabalho visa estudar a influência do uso de diferentes funções de interpolação nos resultados de uma simulação numérica. Como já mencionado o caso numérico escolhido foi o de menor desvio quando comparado com uma solução padrão da literatura. Assim, uma malha bem grosseira ($10 \times 10 \times 10$) propositalmente foi escolhida para simular o comportamento do ar ($Pr = 0.71$) confinado em uma cavidade fechada e diferencialmente aquecida com dimensões $1 \times 2 \times 1$ (valores adimensionais). Uma malha com poucos pontos tem mais chance de obter um número de Reynolds da célula ou número de Peclet da célula – depende da equação que está sendo solucionada – superiores a 2. Isto causaria coeficientes negativos trazendo dificuldades como divergência e instabilidades em problemas onde os termos advectivos forem dominantes e aproximações de alta ordem forem utilizadas no processo de solução. Cinco funções de interpolação foram escolhidas para a execução dos testes, sendo elas: Diferenças Centrais, *Upwind*, Híbrido, *Power Law* e Exponencial. Todas foram implementadas no programa seguindo a orientação descrita por Patankar (2).

Análise da convergência

A primeira investigação visou determinar a influência das diversas funções de interpolação utilizadas na relação entre resíduo e número de iterações. Na Fig. 4 e Fig. 5 onde os números de Rayleigh utilizados foram 10^3 e 10^4 , respectivamente, nenhuma influência foi notada. Para baixos números de Rayleigh os termos advectivos das equações de conservação não trazem grande contribuição para o comportamento do escoamento como um todo. Já na Fig. 6 onde o número de Rayleigh utilizado foi da ordem de 10^5 os termos advectivos começam a influenciar o escoamento de maneira mais intensa do que os termos difusivos nas equações de conservação. Somente a função de interpolação do tipo *Upwind* levou o programa computacional à convergência neste caso. Um segundo teste foi realizado para a função de interpolação do tipo Diferenças Centrais. Nele o número de pontos da malha foi modificado para $20 \times 20 \times 20$, ou seja, oito vezes mais do que no caso onde divergiu, alcançando assim a solução.

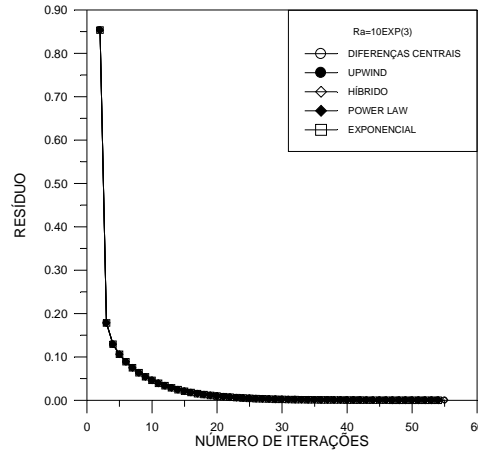


Fig. 4 – Comportamento do resíduo e do número de iterações para $Ra = 10^3$.

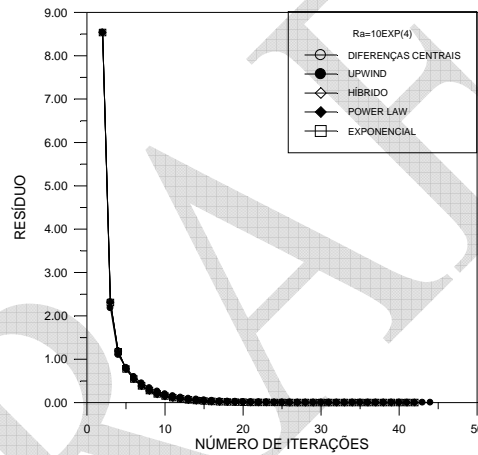
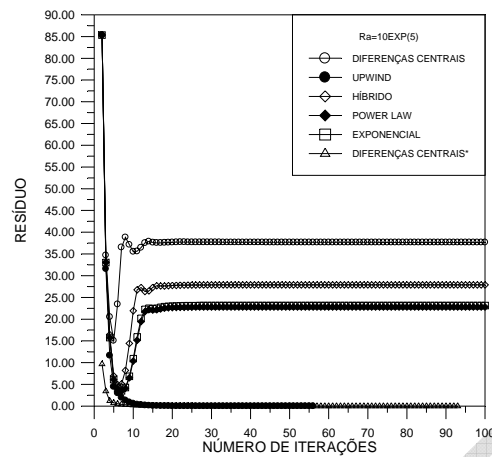


Fig. 5 – Comportamento do resíduo e do número de iterações para $Ra = 10^4$.



= Fig. 6 – Comportamento do resíduo e do número de iterações para $Ra 10^5$.

Análise dos campos de velocidade e de temperatura

As componentes de velocidade máxima em cada direção bem como a temperatura para os números de Rayleigh de 10^3 e 10^4 e as diversas funções de interpolação usadas para cada Rayleigh são mostradas na Tab. 2. Um desvio absoluto em relação a um valor médio da variável (para as diversas funções de interpolação utilizadas) foi apresentado entre parênteses para auxiliar no entendimento dos resultados. De um modo geral o campo de velocidade tem uma tendência bem maior a se desviar do resultado médio quando comparado com o campo de temperatura. Os resultados para o número de Rayleigh da ordem de 10^3 não foram apresentados, pois só a função de interpolação do tipo *Upwind* alcançou a convergência não sendo assim possível calcular os desvios. Entre as componentes de velocidade a que pertence à direção y se mostrou mais sensível com relação ao desvio do que as outras.

Tabela 2. Comparação dos valores máximos das componentes de velocidade e de temperatura

Ra	Função de Interpolação	u_{max} (desvio)	v_{max} (desvio)	w_{max} (desvio)	θ_{max} (desvio)
10 ³	Diferenças Centrais	3,715 (1,5%)	0,2043 (5,4%)	3,759 (1,5%)	0,961 (0,1%)
	Upwind	3,476 (5,0%)	0,159(18,0%)	3,5084 (5,2%)	0,956 (0,4%)
	Híbrido	3,715 (1,5%)	0,2043 (5,4%)	3,759 (1,5%)	0,961 (0,1%)
	Power Law	3,697 (1,0%)	0,20043(3,4%)	3,741 (1,1%)	0,961 (0,1%)
	Exponencial	3,699 (1,1%)	0,20093(3,7%)	3,743 (1,1%)	0,961 (0,1%)
10 ⁴	Diferenças Centrais	15,984 (0,6%)	1,345 (8,3%)	18,608 (2,6%)	0,958 (0,4%)
	Upwind	15,803 (0,6%)	1,117 (10,1%)	17,158 (5,4%)	0,943 (1,1%)
	Híbrido	15,935 (0,2%)	1,325 (6,7%)	18,466 (1,9%)	0,958 (0,4%)
	Power Law	15,879 (0,1%)	1,211 (2,5%)	18,200 (0,4%)	0,955 (0,1%)
	Exponencial	15,879 (0,1%)	1,213 (2,4%)	18,219 (0,5%)	0,955 (0,1%)

Considerações finais

Numa primeira análise o trabalho mostrou de forma objetiva a importância de uma boa escolha da função de interpolação na resolução de problemas onde os termos parabólicos das equações de conservação são dominantes. Isso ficou evidente na Fig. 6 onde somente a função do tipo *Upwind* permitiu a convergência do problema numa malha $10 \times 10 \times 10$. Porém, o uso de tal função de interpolação para aproximar os termos advectivos pode levar a obtenção de uma solução realista, mas com alta dissipação (difusão numérica) causando a destruição da solução nas regiões de altos gradientes. O preço a ser pago seria o aumento do número de pontos como foi feito e mostrado na Fig. 6. Quando se aumentou em oito vezes o número de pontos da malha a função de interpolação do tipo Diferenças Centrais possibilitou a obtenção da solução convergida. O efeito disto foi um aumento substancial do número de iterações. Já a Tab. 2 mostrou uma sensibilidade maior da função de interpolação do tipo *Upwind* comparada com as demais funções, pois os valores dos desvios absolutos das variáveis foram mais altos.

Referências

1. G. D. Raithby, Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 9, pp. 153-164, 1976.
2. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
3. G. D. Raithby, A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 9, pp. 75-103, 1976.
4. H. H. Wrong and G. D. Raithby, Improved Finite-Difference Methods Based on a Critical Evaluation of the Approximation Errors. *Numerical Heat Transfer*, vol. 2, pp. 139-163, 1979.
5. C. Prakash, Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection- Diffusion Equation. *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp. 165-182, 1984.
6. D. B. Spalding, A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.4, pp. 551, 1972.
7. A. A. U. de Souza e C. R. Maliska, Um Esquema para Minimização da Difusão Numérica, XI Congresso Ibero-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia, pp. 165-175, Rio de Janeiro, Brasil, 1990.
8. G. D. Raithby and K. E. Torrance, Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow. *Computers & Fluids*, vol. 2, pp. 191-206, 1974.
9. H. A. Van den Vorst and P. Sonneveld, *CGSTAB, a more smoothly converging variant of CGS*, Tech. Report – Delft University of Technology, pp. 50-90, 1990.
10. G. D. Mallinson and G. de Vahl Davis, Three-Dimensional Natural Convection in a Box: a Numerical Study, *Journal Fluid Mechanics*, vol. 83, pp. 1-31, 1977.